

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2023/24 год, первый отборочный тур

1. Семь различных камней таковы, что любые шесть из них вместе весят меньше 6 кг. Докажите, что все семь камней вместе весят меньше 7 кг.

2. Назовем пару **различных** натуральных чисел *хорошей*, если одно из них делится нацело на другое. Найдите такие 20 натуральных чисел, среди которых нет равных, что если выписать все возможные пары этих чисел, то количество хороших среди них будет равно 101. (Каждая пара записывается один раз. Порядок чисел в парах не учитывается, то есть пары (a, b) и (b, a) считаются за одну.)

Не забудьте объяснить, почему найденные вами числа действительно дают ровно 101 хорошую пару, не больше и не меньше. Ответы без объяснения не засчитываются.

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) точка M — середина стороны AB , а точка K на стороне AC такова, что $\angle ABK = \angle BKA$. Оказалось, что $KB = KM$. Докажите, что $2AC = 3AB$.

4. Пять положительных чисел таковы, что сумма их кубов меньше суммы их квадратов. Докажите, что каждое из этих чисел меньше 2.

5. При каких натуральных n , больших 5, клетчатый квадрат размером $n \times n$ клеток можно без остатка разрезать на прямоугольники из двух клеток и кресты из пяти клеток так, чтобы получились фигуры обоих этих видов? Крест из пяти клеток изображен на рисунке справа.

