Олимпиада им. Леонарда Эйлера

Региональный этап, 2022/23 год

Первый день

1. Два бегуна бегают с равными постоянными скоростями по диагоналям AC и BD соответственно квадрата $ABCD$. Добежав до конца диагонали, бегун сразу поворачивает обратно. Стартовали они одновременно из двух случайно выбранных точек своих диагоналей. Докажите, что найдётся момент, когда расстояние между бегунами будет **строго** меньше половины диагонали квадрата.

2. Пусть p_1, p_2, …, p_{100} — сто простых чисел, среди которых нет одинаковых. Натуральные числа a_1, …, a_k, большие 1, таковы, что каждое из чисел $p_1p_2^3$, $p_2p_3^3$, …, $p_{99}p_{100}^3$, $p_{100}p_1^3$ равно произведению каких-то двух из чисел a_1, …, a_k. Докажите, что $k \geqslant 150$.

3. В клетках таблицы 10×10 расставлены натуральные числа 1, 2, …, 99, 100. Назовём **уголком** фигуру, которая получается удалением одной клетки из квадрата 2×2. Назовем уголок **хорошим**, если число в его клетке, граничащей по сторонам с двумя другими, больше чисел, стоящих в этих двух других клетках. Каково наибольшее возможное число хороших уголков? (Каждый уголок учитывается независимо от того, как он расположен по отношению к другим, разные уголки могут частично накладываться).

4. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка E. Биссектриса AL пересекает отрезок BE в точке X. Оказалось, что $AX = XE$ и $AL = BX$. Чему равно отношение углов A и B треугольника?

5. По кругу расставлено 99 положительных чисел. Оказалось, что для любых четырех стоящих подряд чисел сумма двух первых из них по часовой стрелке равна произведению двух последних из них по часовой стрелке. Чему может быть равна сумма всех 99 расставленных чисел?

Второй день

6. Два бегуна бегают с равными постоянными скоростями по диагоналям AC и BD соответственно квадрата $ABCD$. Добежав до конца диагонали, бегун сразу поворачивает обратно. Стартовали они одновременно из двух случайно выбранных точек своих диагоналей. Докажите, что найдётся момент, когда расстояние между бегунами будет **строго** меньше половины диагонали квадрата.

7. Пусть p_1, p_2, $\ldots$, p_{100} — сто простых чисел, среди которых нет одинаковых. Натуральные числа a_1, $\ldots$, a_k, большие 1, таковы, что каждое из чисел $p_1p_2^3$, $p_2p_3^3$, $\ldots$, $p_{99}p_{100}^3$, $p_{100}p_1^3$ равно произведению каких-то двух из чисел a_1, $\ldots$, a_k. Докажите, что $k \geqslant 150$.

8. В клетках таблицы 10×10 расставлены натуральные числа 1, 2, $\ldots$, 99, 100. Назовём **уголком** фигуру, которая получается удалением одной клетки из квадрата 2×2. Назовем уголок **хорошим**, если число в его клетке, граничащей по сторонам с двумя другими, больше чисел, стоящих в этих двух других клетках. Каково наибольшее возможное число хороших уголков? (Каждый уголок учитывается независимо от того, как он расположен по отношению к другим, разные уголки могут частично накладываться).

9. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка E. Биссектриса AL пересекает отрезок BE в точке X. Оказалось, что $AX = XE$ и $AL = BX$. Чему равно отношение углов A и B треугольника?

10. По кругу расставлено 99 положительных чисел. Оказалось, что для любых четырех стоящих подряд чисел сумма двух первых из них по часовой стрелке равна произведению двух последних из них по часовой стрелке. Чему может быть равна сумма всех 99 расставленных чисел?