

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2022/23 год, первый отборочный тур

1. На дискотеку пришли 42 человека: мальчики и девочки. Каждая девочка потанцевала со всеми мальчиками, кроме четырёх, а каждый мальчик потанцевал со всеми девочками, кроме трёх. Сколько мальчиков было на танцах?

2. Запишите четыре числа (не обязательно целых), среди которых нет одинаковых, чтобы выполнялось такое условие: если число x есть среди записанных, то хотя бы одно из чисел $x - 1$ или $6x - 1$ тоже есть среди записанных.

3. Внутри стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ нашлась такая точка E , что прямая AE делит четырёхугольник на две равные по площади части. Какая из вершин четырехугольника находится дальше всех от прямой AE ?

4. Петя и Вася играют в такую игру. Вначале в каждой из 2022 коробок лежит по одной спичке. За один ход можно переложить все спички из любой непустой коробки в любую другую непустую коробку. Ходят по очереди, начинает Петя. Побеждает тот, после хода которого в какой-то коробке впервые окажется не меньше половины всех спичек. Кто победит при правильной игре?

5. Делители натурального числа n (включая n и 1), имеющего больше трёх делителей, выписали по возрастанию:

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n.$$

Разности

$$u_1 = d_2 - d_1, \quad u_2 = d_3 - d_2, \quad \dots, \quad u_{k-1} = d_k - d_{k-1}$$

оказались такими, что

$$u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \dots = u_{k-1} - u_{k-2}.$$

Найдите все такие n .