

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2020/21 год, первый отборочный тур

1. За круглым столом сидели 99 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них сказал: «Хотя бы один из двух моих соседей — лжец.» Могло ли среди них быть ровно 60 рыцарей?

2. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b , что

$$\text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b) = ab/2.$$

3. На шахматной доске 8×8 нарисованы по клеточкам 17 не налегающих друг на друга двухклеточных прямоугольников. Докажите, что на доске найдутся две имеющие общую сторону клетки, одна из которых лежит в одном из нарисованных прямоугольников, а другая — в другом прямоугольнике.

4. Положительные числа a, b, c, d таковы, что

$$(a + b + 2c)^2 > d, \quad (b + c + 2d)^2 > a, \quad (c + d + 2a)^2 > b, \quad (d + a + 2b)^2 > c.$$

Докажите, что $a + b + c + d > 1/4$.

5. В треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) на катете BC отмечены точки K и L такие, что

$$\angle CAK = \angle KAL = \angle LAB.$$

На гипотенузе AB отмечена точка M такая, что $ML = KL$. Докажите, что перпендикуляр из точки C на прямую AK не делит отрезок ML пополам.