

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2019/20 год, второй отборочный тур

1. Каждую клетку доски 7×7 закрасили в один из девяти цветов. Известно, что у каждой клетки, не примыкающей к краю доски, есть соседи (по горизонтали, вертикали или диагонали) всех восьми цветов, не совпадающих с цветом этой клетки. Докажите, что клеток каждого из девяти цветов не меньше четырех.

2. Вася знает, что Петя задумал натуральное число, не большее 4. Вася может указать любое натуральное число или несколько чисел и спросить Петю, есть ли задуманное число среди них (например: «Верно ли, что задуманное число равно 2?» или «Верно ли, что задуманное число равно 2 или 3?»). Петя должен ответить «Да» или «Нет». Как Васе за 11 вопросов узнать задуманное число, если Петя в ответ может и соврать, но не больше трех раз?

3. Напомним, что **факториалом** $n!$ натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно (например, $1! = 1$, а $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$). Можно ли из чисел $1!, 2!, \dots, 99!, 100!$ вычеркнуть одно так, чтобы произведение оставшихся оказалось кубом натурального числа?

4. Точки D и E лежат на продолжениях сторон AB и BC остроугольного треугольника ABC за точки B и C соответственно. Точки M и N — середины отрезков AE и DC . Докажите, что $MN > AD/2$.

5. На экране компьютера горит число, а на пульте компьютера есть две кнопки. Нажатие на одну из кнопок переводит число n , написанное на экране, в $2n - 1$, а на другую — в $2n + 1$. Пока оператор отсутствовал, хулиган Вася подкрался к пульту и произвёл сто несанкционированных нажатий на кнопки. Докажите, что по числу, которое теперь горит на экране, оператор (знающий, сколько раз Вася нажимал на кнопки и какое число было на экране до прихода Васи) сможет определить, в каком порядке Вася нажимал на кнопки, если число, горевшее вначале на экране:

1. целое;
2. произвольное.