

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2019/20 год, первый отборочный тур

1. Саша, Андрей и Оля выбрали по натуральному числу. Каждый из них умножил числа, выбранные двумя другими ребятами, на свое число и вычел меньшее произведение из большего. У Саши получилось 1, а у Андрея 121. Сколько могло получиться у Оли? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.
2. На окружности отмечено 150 серых, 151 бурая и 152 малиновых точки таким образом, что никакие две одноцветные точки не стоят рядом. Докажите, что найдётся бурая точка, у которой оба соседа — малиновые.
3. Клетчатый прямоугольник 100×101 (100 строк, 101 столбец) разбит на полоски 1×5 так, что в каждом столбце содержится ровно k вертикальных полосок. Чему может быть равно k ?
4. Внутри трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), где $AD = 2BC$, взята точка F , для которой $AB = FB$. Точка M — середина отрезка FD . Докажите, что $CM \perp FA$.
5. Существуют ли 10 000 последовательных семизначных чисел, которые можно разбить на 99 групп так, чтобы сумма всех чисел в каждой из групп была одной и той же?