

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2018/19 год, третий отборочный тур

1. Вася, Петя и Коля учатся в одном классе. Вася в ответ на любой вопрос врёт, Петя попеременно врёт и говорит правду, а Коля врёт в ответ на каждый третий вопрос, а в остальных случаях говорит правду. Однажды каждого из них шесть раз подряд спросили, сколько человек учится в их классе. В ответ пять раз прозвучало: «Двадцать пять», шесть раз: «Двадцать шесть» и семь раз: «Двадцать семь». Можно ли по их ответам узнать, сколько человек в их классе на самом деле?
2. В трапеции $ABCD$ основание AD больше боковой стороны CD . Биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K . Докажите, что $AK > KB$.
3. Петя задумал 8 различных чисел, а потом стал выбирать из них по два и делить большее на меньшее. Он нашел 22 из 28 возможных частных, и они оказались натуральными степенями двойки. Докажите, что 6 оставшихся частных — тоже натуральные степени двойки. (Натуральная степень двойки — это 2 в степени, показатель которой равен натуральному числу.)
4. На окружности отмечены 48 точек, делящих ее на равные дуги. Играют двое, ходят по очереди. За один ход разрешается стереть либо три отмеченные точки, лежащие в вершинах равностороннего треугольника, либо четыре отмеченные точки, лежащие в вершинах квадрата. Дважды стирать одну точку нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто при правильной игре выиграет независимо от действий соперника: тот, кто делает первый ход, или тот, кто ходит вторым?
5. Есть 40 гирь. Веса любых двух отличаются не более чем на 45 кг. Любые десять из этих гирь можно разбить на две группы по пять гирь, суммы весов которых отличаются не более чем на 11 кг. Докажите, что найдутся две гири, веса которых отличаются не более чем на 1 кг.