

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2018/19 год, второй отборочный тур

1. Машина едет с постоянной скоростью в одном направлении по прямой дороге, возле которой стоят два дома. В полдень, когда машина еще не доехала до домов, сумма расстояний от нее до этих домов равнялась 10 км. Через 10 минут, когда машина уже миновала оба дома, оказалось, что сумма расстояний от нее до домов снова равна 10 км. Какова скорость машины?

2. При каком наибольшем натуральном k клетки таблицы 5×5 можно заполнить нулями и единицами (в каждой клетке должно стоять ровно одно число) так, чтобы нашлись k строк, в каждой из которых сумма чисел не меньше 3, и k столбцов, в каждом из которых сумма чисел не больше 2?

3. Внутри треугольника ABC расположена точка P . На стороне BC выбрана точка H , не совпадающая с серединой стороны. Оказалось, что биссектриса угла AHP перпендикулярна стороне BC , угол ABC равен углу HCP и $BP = AC$. Докажите, что $BH = AH$.

4. Найдите все натуральные числа n , для которых число

$$n^7 + n^6 + n^5 + 1$$

имеет ровно три натуральных делителя.

5. Назовем **сапогом** клетчатую фигуру, составленную из прямоугольника шириной одну и длиной не менее двух клеток и клетки, примыкающей сбоку к одной из крайних клеток этого прямоугольника (на рисунке изображен пример сапога, составленного из 5 клеток; фигуры, которые получаются из изображенного сапога поворотами и переворотами — тоже сапоги). Можно ли какой-нибудь клетчатый квадрат разрезать по границам клеточек на сапоги, среди которых нет равных? Напомним, что фигуры называются равными, если их можно наложить друг на друга так, что они совместятся.

