

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2018/19 год, первый отборочный тур

1. Таблица 70×70 заполнена числами от 1 до 4900:

- в первой строке слева направо выписаны числа от 1 до 70 в порядке возрастания;
- во второй строке точно так же выписаны числа от 71 до 140;
- и т. д.;
- в последней строке слева направо выписаны числа от 4831 до 4900.

Можно ли в этой таблице найти такую клеточку, что сумма пяти чисел, находящихся в ней и четырёх клеточках, соседних с ней по сторонам, равна 2018?

2. За круглым столом сидят 100 человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо чудак. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжет. Чудаки говорят

- правду, если слева от него сидит лжец;
- ложь, если слева от него сидит рыцарь;
- все что угодно, если слева от него сидит чудаки.

Каждый сказал: «Справа от меня сидит лжец». Сколько за столом лжецов? Перечислите все возможные ответы и докажите, что других нет.

3. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB равна диагонали BD . Точка M — середина диагонали AC . Прямая BM пересекает отрезок CD в точке E . Докажите, что $BE = CE$.

4. На парковке стоят машины. Среди них есть машины марок «Тойота», «Хонда», «Шкода», а также машины других марок. Известно, что не «Хонд» в полтора раза больше, чем не красных машин; не «Шкод» в полтора раза больше, чем не желтых машин; наконец, не «Тойот» вдвое меньше, чем красных и желтых машин вместе. Докажите, что «Тойот» не меньше, чем «Хонд» и «Шкод» вместе.

5. Кузнечик начинает движение в левой верхней клетке квадрата 10×10 . Он может прыгать на одну клетку вниз или вправо. Кроме того, кузнечик может из самой нижней клетки любого столбца перелететь в самую верхнюю клетку того же столбца, а из самой правой клетки любой строки перелететь в самую левую клетку той же строки. Докажите, что кузнечику понадобится хотя бы 9 перелетов, чтобы побывать на каждой клетке квадрата хотя бы по одному разу.