

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2017/18 год, второй отборочный тур

1. Четыре мальчика заглянули в коробку, где лежат цветные шарики. На вопрос, каких цветов шарики там лежат, они ответили так.

- Петя: «Красные, синие и зелёные.»
- Вася: «Красные, синие и жёлтые.»
- Коля: «Красные, жёлтые и зелёные.»
- Миша: «Жёлтые, зелёные и синие.»

Могло ли случиться, что каждый из мальчиков один цвет назвал верно, а два — неверно?

2. Докажите, что если

$$a + b + c + d = 0 \quad \text{и} \quad ab + cd + ac + bc + ad + bd = 0,$$

то $a = b = c = d = 0$.

3. Боря нарисовал девять отрезков, три из которых равны трём высотам треугольника ABC , три — трём биссектрисам, три — трём медианам. Оказалось, что для любого из нарисованных отрезков среди остальных восьми найдётся равный ему. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

4. По окружности красным карандашом записали 49 различных натуральных чисел, меньших 100. Между каждыми двумя соседними красными числами записали синим их наибольший общий делитель. Могло ли случиться, что все синие числа различны?

5. Палочка разломана на 15 частей так, что ни из каких трёх частей нельзя сложить треугольник. Докажите, что среди частей есть такая, которая длиннее трети исходной палочки.