Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2016/17 год, первый отборочный тур

1. Какое наименьшее количество цифр можно вычеркнуть из числа 20162016 так, чтобы результат делился на 2016 (ничего не вычёркивать нельзя)? Напоминаем, что надо не только привести пример, но и объяснить, почему меньшим количеством цифр обойтись нельзя.

2. Два велосипедиста ехали по шоссе, каждый со своей постоянной скоростью. Оказалось, что более быстрый из них проезжает 6 км на 5 минут быстрее, а за 20 минут проезжает на 4 км больше, чем медленный. Найдите произведение скоростей велосипедистов, выраженных в километрах в час.

3. В футбольном турнире, где каждая команда встречалась с каждой один раз, играли 16 команд. За победу давали три очка, за ничью — одно, за поражение — ноль. После окончания турнира выяснилось, что каждая команда выиграла хотя бы треть своих матчей и проиграла хотя бы треть своих матчей. Докажите, что какие-то две команды набрали поровну очков.

4. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Точка P такова, что $DOCP$ — тоже параллелограмм (CD — его диагональ). Обозначим через Q точку пересечения BP и AC, а через R — точку пересечения DQ и CP. Докажите, что $PC = CR$.

5. Существуют ли такие натуральные числа m, n, k, что все три числа

$$m^2 + n + k, \quad n^2 + k + m, \quad k^2 + m + n$$

являются квадратами натуральных чисел?