

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2014/15 год, третий отборочный тур

1. Улитка ползет вокруг циферблата часов против часовой стрелки с постоянной скоростью. Она стартовала в 12.00 с отметки 12 часов, и закончила полный круг ровно в 14.00. Какое время показывали часы, когда улитка в ходе своего движения встречалась с минутной стрелкой?

2. В каждую клетку таблицы 2×2 вписано по одному числу. Все числа различны,

- сумма чисел в первой строке равна сумме чисел во второй строке,
- а произведение чисел в первом столбце равно произведению чисел во втором столбце.

Найдите сумму всех четырёх чисел.

3. Биссектрисы углов A и C разрезают неравнобедренный треугольник ABC на четырёхугольник и три треугольника, причём среди этих трёх треугольников есть два равнобедренных. Найдите углы треугольника ABC .

4. Все делители натурального числа N , кроме N и единицы, выписали в ряд по убыванию:

$$d_1 > d_2 > \dots > d_k.$$

Оказалось, что в каждой паре делителей, одинаково удалённых от концов этого ряда, больший делитель делится на меньший (то есть d_1 делится на d_k , d_2 — на d_{k-1} и т. д.). Докажите, что в любой паре делителей числа N больший делитель делится на меньший.

5. Двое играют в такую игру. За один ход можно положить в одну из клеток квадратной доски 1001×1001 один камешек (первоначально доска пуста; в одной клетке может лежать любое число камешков). Ходят по очереди. Как только в каком-то ряду (вертикали или горизонтали) оказывается более 5 камешков, сделавший последний ход признается проигравшим. Кто из игроков сможет выиграть независимо от действий соперника: тот, кто делает первый ход или тот, кто ходит вторым?