Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2013/14 год, четвёртый отборочный тур

1. Разбойники засыпали сундук доверху золотым и серебряным песком, причём золотого песка насыпали в 2 раза больше по объему, чем серебряного. Али-Баба посчитал, что, если высыпать половину серебряного песка и досыпать сундук доверху золотым песком, цена сундука поднимется на 20 процентов. Как и на сколько процентов изменится стоимость сундука, если высыпать половину золотого песка и досыпать сундук доверху серебряным песком?

2. На сторонах AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$ выбраны соответственно точки K, L, M, N так, что

$$AK = AN, \quad BK = BL, \quad CL = CM, \quad DM = DN$$

и $KLMN$ — прямоугольник. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

3. К переправе подошли царевна Соня и 7 богатырей. Богатыри выстроились в ряд так, что

- каждые двое рядом стоящих богатырей — друзья,
- богатыри, стоящие не рядом, между собой не дружат,
- а царевна дружит со всеми кроме среднего богатыря.

Имеется одна лодка, в которой могут плыть либо двое друзей, либо трое попарно дружащих (в одиночку плыть нельзя). Смогут ли переправиться все подошедшие к переправе?

4. Петя и Вася играют на клетчатой доске 20×20. Каждым ходом игрок выбирает клетку, у которой все 4 стороны не окрашены, и красит все стороны в красный и синий цвета в любом порядке (например, может покрасить все в один цвет). При этом не должно получаться отрезков одного цвета длиной более чем одна сторона клетки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первым ходит Петя. Кто из игроков может выигрывать, как бы ни играл соперник?

5. Какое наибольшее количество двузначных чисел можно записать в ряд так, чтобы любые два соседних числа были не взаимно просты, а любые два несоседних числа — взаимно просты?