

## Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2013/14 год, третий отборочный тур

1. Коля, Вася и Петя пошли за покупками. Всего у них с собой 2200 рублей, и ни у кого нет монет мельче рубля. У Коли с собой в 18 раз меньше денег, чем у Васи. Докажите, что Петя сможет купить мороженое за 15 рублей.
2. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  с углом  $120$  градусов при вершине  $B$  отмечены такие точки  $D$  и  $E$ , что  $AD = AB$  и  $CE = CB$ . Из точки  $D$  опущен перпендикуляр  $DF$  на прямую  $BE$ . Найдите отношение  $BD/DF$ .
3. 30 человек выстроены в шесть шеренг по пять человек в каждой. Каждый из них либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт, и всем им известно, кто из них рыцарь, а кто — лжец. Журналист спросил у каждого из них: «Верно ли, что найдутся хотя бы 4 шеренги, в каждой из которых лжецов больше половины?». Какое наибольшее количество ответов «да» он мог услышать?
4. Миша и Маша ехали на поезде в Киров. Миша лежал на полке, а Маша смотрела в окно. «Далеко ли до Кирова?» — спросил Миша у Маши в 12.00. «73 километра», — ответила Маша. На тот же вопрос, заданный в 12.15 и 12.45, Маша ответила: «62 километра» и «37 километров». Известно, что Маша, если расстояние составляло не целое число километров, каждый раз округляла его до ближайшего целого числа (а если таких было два — то до любого из них по своему выбору). Найдите скорость поезда, если известно, что она была постоянной. Укажите все возможности и докажите, что других нет.
5. Двое играют в игру. Вначале у них есть прямоугольный лист бумаги размером  $m \times n$ , где  $m$  и  $n$  — натуральные числа, большие 1. Игроки ходят по очереди. Каждым ходом игрок разрезает имеющийся прямоугольник на два, один из которых имеет площадь 1, и выбрасывает прямоугольник единичной площади. Проигрывает тот, после хода которого у оставшегося прямоугольника есть сторона длины строго меньше 1 или остался квадрат  $1 \times 1$ . Кто победит при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнёр, — и как ему для этого надо играть?