

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2012/13 год, второй отборочный тур

1. На доске выписаны числа от 1 до 2150. Каждую минуту каждое число подвергается следующей операции: если число делится на 100, то его делят на 100, если же не делится, то из него вычитают 1. Найдите наибольшее среди чисел на доске через 87 минут.
2. Навигатор на «Лексусе» бизнесмена Бориса Михайловича сообщает, сколько осталось ехать до пункта назначения, если двигаться со скоростью, равной средней скорости на промежутке от начала пути до настоящего момента. Борис Михайлович выехал из дома на дачу. В середине пути навигатор сообщил, что осталось ехать 1 час. В этот момент прямо перед «Лексусом» на дорогу выехал тракторист Вася, обогнать которого не было никакой возможности. После того, как Борис Михайлович проехал половину оставшегося пути, навигатор сообщил, что осталось ехать 2 часа. Через сколько часов после этого приедет на дачу бизнесмен, если так и не обгонит тракториста? (Скорость трактора постоянна.)
3. Точка E — середина основания AD трапеции $ABCD$. Отрезки BD и CE пересекаются в точке F . Известно, что $AF \perp BD$. Докажите, что $BC = FC$.
4. Квадрат 20×20 разбит на единичные квадратики. Несколько сторон единичных квадратиков стёрты, причем стёртые отрезки не имеют общих концов, а на верхней и правой сторонах квадрата стёртых отрезков нет. Докажите, что из левого нижнего угла квадрата можно добраться в правый верхний по нестёртым отрезкам.
5. Вася вычислил суммы цифр у 200 последовательных натуральных чисел и выписал эти суммы в строку в некотором порядке. Петя выписал под ними суммы цифр еще каких-то 200 последовательных натуральных чисел (также в произвольном порядке). После чего Таня умножила каждое из Васиных чисел на число, написанное под ним, и получила в результате 200 последовательных натуральных чисел. Докажите, что кто-то из них ошибся.