Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2012/13 год, первый отборочный тур

1. На день рождения родители дарят Дяде Фёдору сумму денег, равную произведению возраста папы на возраст мамы. Могло ли случиться, что в 2010 и 2011 годах полученные им суммы кончались на одну и ту же цифру, а сумма, полученная в 2012 году, делилась на 10?

2. Маша упражняется в перекрашивании шахматной доски. За один раз она может изменить цвет каждой клетки в любом прямоугольнике, прилегающем к углу доски. Получится ли у неё с помощью таких операций перекрасить всю доску в один цвет?

3. В треугольнике ABC $AB = BC$. На лучах CA, AB и BC отмечены соответственно точки D, E и F так, что

$$AD = AC, \quad BE = BA, \quad CF = CB.$$

Найдите сумму углов ADB, BEC и CFA.

4. Положительные числа x и y таковы, что

$$x^2 > x + y, \quad \text{а} \quad x^4 > x^3 + y.$$

Докажите, что $x^3 > x^2 + y$.

5. 40 детей стоят по кругу. Ребёнок называется

- **дылдой**, если он выше двух следующих за ним по часовой стрелке, и
- **мелким**, если он ниже обоих предшествующих ему по часовой стрелке.

(Ребёнок может быть и мелким, и дылдой одновременно.) Известно, что дылд не меньше 30. Докажите, что мелких не меньше 20.