

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2011/12 год, четвёртый отборочный тур

1. Можно ли из пяти одинаковых прямоугольников с периметром 10 составить один прямоугольник с периметром 22?

2. В треугольнике ABC

$$AC = 1, \quad AB = 2,$$

O — точка пересечения биссектрис. Отрезок, проходящий через точку O параллельно стороне BC , пересекает стороны AC и AB в точках K и M соответственно. Найдите периметр треугольника AKM .

3. Фирма «Рога и копыта» разделилась на фирму «Рога» и фирму «Копыта» с разным числом сотрудников. Директор фирмы «Рога» получает такую же зарплату, как директор фирмы «Копыта», и средняя зарплата всех остальных сотрудников фирмы «Рога» совпадает со средней зарплатой всех остальных сотрудников фирмы «Копыта». Кроме того, средняя зарплата всех сотрудников фирмы «Рога» совпадает со средней зарплатой всех сотрудников фирмы «Копыта». Что больше: зарплата директора фирмы или средняя зарплата всех остальных сотрудников?

4. Делитель натурального числа называется собственным, если он больше 1 и меньше самого этого числа. Натуральное число называется элегантным, если оно имеет не менее двух собственных делителей и делится на разность любых двух из них. Найдите все элегантные числа.

5. На клетчатой бумаге нарисована лента 1×2011 , в первой клетке написано число 1, а в последней — число 2. Петя и Вася поочередно записывают в любую из свободных клеток числа 1 и 2. Петя ходит первым и пишет только единицы, а Вася — только двойки. Когда свободные клетки заканчиваются, Петя подсчитывает количество пар соседних клеток, в которых записаны одинаковые числа, а Вася — в которых разные. Если Петино число больше, то он выигрывает, в противном случае выигрывает Вася. Кто победит при правильной игре?