

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2011/12 год, третий отборочный тур

1. У дороги из Ёлкино в Палкино растёт дуб, от которого до Ёлкино вдвое ближе, чем до Палкино. Федя, едущий с постоянной (и большей 0) скоростью из Ёлкино в Палкино, в 12.00 был вдвое ближе к дубу, чем к Ёлкино. В 12.40 снова оказалось, что Федя вдвое ближе к дубу, чем к Ёлкино. Когда Федя приедет в Палкино?

2. Каждый из трёх мальчиков либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Им сообщили шесть натуральных чисел. После этого каждый из мальчиков сделал по два утверждения.

• Петя:

1. Это шесть последовательных натуральных чисел.
2. Сумма этих шести чисел чётна.

• Вася:

1. Это числа 1, 2, 3, 4, 5, 6.
2. Коля — лжец.

• Коля:

1. Все эти числа различны и делятся на 3.
2. Каждое из этих чисел меньше 20.

Какие числа сообщили мальчикам?

3. Есть шесть внешне одинаковых монет. Четыре из них настоящие, две — фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, каждая из фальшивых весит меньше настоящей, и веса фальшивых монет различны. Есть весы с двумя чашками: если на них положить монеты, перевесит чашка, монеты на которой весят больше (но насколько больше, мы не знаем). Как за три взвешивания найти обе фальшивые монеты? (Определять, какая из двух фальшивых монет легче, не требуется.)

4. Внутри острого угла BAC взяли такую точку D , что угол CAD вдвое больше угла BAD . Могла ли точка D оказаться вдвое дальше от прямой AC , чем от прямой AB ?

5. Числитель каждой из 48 дробей равен одному из чисел

$$2, 3, \dots, 49,$$

знаменатель — тоже, причём каждое из этих 48 чисел встречается как среди числителей, так и среди знаменателей. Докажите, что либо одна из этих дробей равна целому числу, либо из них можно выбрать не более 25 дробей, произведение которых — целое число.