Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2011/12 год, второй отборочный тур

1. На уроке физкультуры все ученики 8а класса построились в шеренгу. Оказалось, что мальчики и девочки в ней чередуются. Известно, что ровно 52% учеников 8а класса — мальчики. Найдите количество девочек в 8а классе. Не забудьте обосновать ответ.

2. На острове 1000 деревень, в каждой из которых 99 жителей. Каждый житель острова — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. При этом известно, что на острове ровно 54054 рыцаря. В один прекрасный день каждому жителю острова был задан вопрос: «Кого в Вашей деревне больше: рыцарей или лжецов?» Оказалось, что в каждой деревне на этот вопрос

- 66 человек ответило, что в деревне больше рыцарей,
- и 33 — что больше лжецов.

Сколько на острове деревень, в которых рыцарей больше, чем лжецов?

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL, и на ее продолжении за точку L выбрана точка K, для которой $LK = AB$. Оказалось, что $AK \parallel BC$. Докажите, что $AB > BC$.

4. Квадрат 15×15 разбит на квадратики 1×1. Из этих квадратиков выбрали несколько, и в каждом из выбранных провели одну или две диагонали. Оказалось, что никакие две проведенные диагонали не имеют общего конца. Какое наибольшее число диагоналей может быть проведено? (В решении приведите ответ, способ проведения диагоналей и доказательство того, что это число диагоналей действительно наибольшее возможное.)

5. В строку выписаны 2011 последовательных пятизначных чисел. Оказалось, что сумма цифр 21-го числа равна 37, а сумма цифр 54-го равна 7. Найдите сумму цифр 2011-го числа. (Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других ответов нет.)