

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2011/12 год, первый отборочный тур

1. Можно ли в половину клеток доски 12×12 поместить по фишке так, чтобы в одном квадрате 2×2 , составленном из клеток доски, было нечётное количество фишек, а в остальных — чётное?
2. В треугольнике ABC угол C втрое больше угла A , а сторона AB вдвое больше стороны BC . Докажите, что угол ABC равен 60 градусам.
3. Даны 5 различных натуральных чисел. Произведение двух наименьших из них больше 25 , а произведение двух наибольших — меньше 75 . Найдите все эти числа (укажите все возможные варианты и докажите, что других вариантов нет).
4. У Али-Бабы есть 40 мешков с монетами. Джинн может по просьбе Али-Бабы определить количество монет в каждом из двух указанных ему мешков, но при этом возьмёт за работу одну монету из одного из этих мешков (и Али-Баба не увидит, из какого именно). Сможет ли Али-Баба действовать так, чтобы после не более чем 100 таких процедур точно сказать, сколько монет в данный момент лежит в каждом из мешков, кроме тех двух, которые джинн пересчитывал последними? В каждом мешке — не меньше 1000 монет.
5. Даны девять натуральных чисел, причём запись первого состоит только из единиц, второго — только из двоек, ..., девятого — только из девяток. Может ли произведение каких-то двух из этих чисел делиться на произведение остальных?