

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2010/11 год, четвёртый отборочный тур

1. У гражданина Сидорова есть ровно столько денег, сколько нужно на покупку тонны кругликов и тонны шмугликов. Если он купит на 20% кругликов больше, то ему сделают 40-процентную скидку на шмуглики, и оставшихся денег на покупку тонны шмугликов ему хватит. А, если он купит на 40% шмугликов больше, то ему сделают 20-процентную скидку на круглики, и оставшихся денег на покупку тонны кругликов ему тоже хватит. Что дороже и во сколько раз: тонна кругликов или тонна шмугликов? (И в том, и другом случае не обязательно будут израсходованы все деньги.)

2. Разделите прямоугольный треугольник с углом 30° на два меньших треугольника так, чтобы какая-то медиана одного из этих треугольников была параллельна одной из биссектрис второго треугольника.

3. Три натуральных числа a , b , c подобраны так, что

$$\text{НОД}(ab, c) = \text{НОД}(a, bc).$$

Докажите, что после сокращения дроби a/c получится несократимая дробь, числитель и знаменатель которой взаимно просты с b .

4. Дан пятиугольник $ABCDE$ такой, что

$$AB = BC = CD = DE, \quad \angle B = 96^\circ, \quad \angle C = \angle D = 108^\circ.$$

Найдите $\angle E$.

5. Петя раскладывает карточки с числами $1, 2, \dots, 9$ в клетки таблицы 3×3 . Затем он отворачивается, а Витя меняет местами какие-то две карточки из клеток с общей стороной, и переворачивает все карточки лицом вниз. После этого Петя один раз показывает на одну или несколько карточек, а Витя сообщает сумму чисел на них. Сможет ли Петя действовать так, чтобы в результате гарантированно узнать, где какая карточка?