Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2010/11 год, первый отборочный тур

1. Назовём два положительных целых числа **почти соседними**, если каждое из них делится (без остатка) на их разность. На уроке математики Вову попросили выписать в тетрадь все числа, почти соседние с 2^{10}. Сколько чисел ему придётся выписать?

2. Точки E и F — середины сторон BC и CD соответственно прямоугольника $ABCD$. Докажите, что $AE < 2EF$.

3. Пусть a, b, c — такие целые числа, что

$$(a+b+c)^2 = -(ab+ac+bc),$$

и числа $a+b$, $b+c$, $a+c$ не равны 0. Докажите, что произведение любых двух из чисел $a+b$, $a+c$, $b+c$ делится на третье.

4. В ряд выложена 101 карточка. На каждой из 50 карточек, лежащих в этом ряду на чётных местах, нарисован значок «>» или «<». Докажите, что, как бы ни были нарисованы эти значки, можно заполнить остальные карточки числами 1, 2, …, 51 (использовав каждое по разу) так, чтобы все получившиеся неравенства оказались верными.

5. Алина обвела на шахматной доске (8×8) 22 различных (но, возможно, перекрывающихся) трёхклеточных прямоугольничка, а Полина — 22 неперекрывающихся двуклеточных прямоугольничка (но, возможно, перекрывающихся с прямоугольничками Алины). Докажите, что на доску можно положить крестик из 5 клеток, полностью накрывающий хотя бы две обведённые фигурки. (Крестик может выходить за края доски.)