

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2009/10 год, первый отборочный тур

1. У Феди есть несколько гирь, веса которых в килограммах — целые числа, меньшие 10. Может ли случиться, что ими можно набрать веса в 100, 102, 103 и 104 кг, а веса в 101 и 105 кг — нельзя?
2. В каждой из 111 семей — три человека: папа, мама и ребёнок. Все 333 человека выстроились в ряд. Оказалось, что родители каждого ребёнка стоят с разных сторон от него (но, возможно, не рядом с ним). Докажите, что среди центральных 111 человек в этом ряду есть хотя бы один ребёнок.
3. Точка D лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC , но не совпадает с её серединой. Докажите, что среди отрезков AD , BD и CD нет равных.
4. Пятизначное число x начинается на 4 и оканчивается на 7, а пятизначное число y начинается на 9 и оканчивается на 3. Известно, что у чисел x и y есть общий пятизначный делитель. Докажите, что $2y - x$ делится на 11.
5. Имеется 2009 кучек, по 2 камня в каждой. Разрешается взять самую большую кучку из тех, в которых количество камней чётно (если таких несколько, то любую из них), и ровно половину камней из неё переложить в любую другую кучку. Какое наибольшее число камней в одной кучке можно получить такими операциями?