

Олимпиада «Надежда энергетики» по математике

11 класс, 2016 год

1. В стране «Энергетика» 150 заводов и некоторые из них соединены автобусными маршрутами, которые не останавливаются нигде, кроме этих заводов. Оказалось, что любые четыре завода можно разбить на две пары так, что между заводами каждой пары ходит автобус. Найдите наименьшее число пар заводов, которые могут быть соединены автобусными маршрутами.

2. Для числовой последовательности $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ выполняются соотношения

$$2x_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} - x_n$$

при всех $n = 0, 1, 2, \dots$. Найдите каждый член x_n такой последовательности и значения сумм $S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$.

3. Шесть чисел записаны в ряд. Известно, что среди них есть единица и любые три соседних числа имеют одинаковое среднее арифметическое. Найдите максимальное значение среднего геометрического любых трех соседних в этом ряду чисел, если среднее арифметическое всех шести чисел равно A .

4. Дан квадратный трехчлен $g(x)$, имеющий ровно один корень. Найдите этот корень, если известно, что и многочлен $g(ax + b) + g(cx + d)$ ($a \neq c$) имеет ровно один корень.

5. При благоустройстве городского сада «Пифагор» сначала были проложены три аллеи, образующие прямоугольный треугольник с острым углом α . Следующие аллеи проложили как внешние квадраты на сторонах этого треугольника (получилась фигура, иллюстрирующая теорему Пифагора и называемая пифагоровыми штанами). Наконец, на третьем этапе соединили прямолинейными аллеями центр наибольшего квадрата с вершиной прямого угла, а центры двух меньших квадратов друг с другом. Определите, какая из аллей третьего этапа имеет большую длину. При каком значении угла α их длины различаются сильнее всего?