

Олимпиада «Надежда энергетики» по математике

9 класс, 2015 год, вариант 1

1. 100 сотрудников энергетической компании пользуются сетью Монолайн, а 200 сотрудников — сетью Громофон. За внутрисетевой звонок Монолайн берёт 43 копейки, а Громофон меньше, но целое число копеек. За звонок в другую сеть стоимость звонка возрастает в 3 раза. Все входящие звонки бесплатные. В течение дня каждый сотрудник звонит каждому по одному разу и от каждого один раз получает встречный звонок. Сколько стоят звонки с Громофона, если его ежедневные доходы с компании более чем на десять тысяч рублей превышают доходы Монолайна?
2. Наземный клапан подземного газохранилища огражден деревянным забором в виде окружности, разделенной 5 кирпичными столбами на 5 дуг. Требуется раскрасить деревянные части забора так, чтобы каждая дуга была бы одного цвета, а любые две соседние дуги имели разные цвета. Какое минимальное число цветов достаточно? Сколькими способами можно это сделать, используя минимальное число цветов?
3. На шахматную доску поставили шашки так, что во всех горизонтальных рядах число шашек различно (цвет шашек и клеток при этом не имеет значения). Возможно ли, что в каждой вертикальной колонке число шашек не равно числу шашек ни на одной из горизонталей? Что изменится, если 64-клеточную доску заменить на 100-клеточную?
4. Для положительных чисел x, y, z заданы значения $xyz = 1, x + \frac{1}{z} = 5, y + \frac{1}{x} = 29$. Найдите значение $z + \frac{1}{y}$.
5. На доске написано 15 различных натуральных чисел. Оказалось, что среди них 8 чисел делятся на 7, а 10 чисел делятся на 11. Докажите, что среди них есть число, большее 220.
6. Целой частью $[x]$ произвольного числа x называется наибольшее целое m такое, что $m \leq x$. Найдите все натуральные значения n , при которых разрешимо уравнение $[x^n - 1] = \frac{x}{2}$. Для каждого найденного значения n укажите все решения x .
7. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали AC и BD перпендикулярны. Сравните величины $BC \cdot AD$ и $AB \cdot CD$.