

ДВИ по математике в МГУ

2025 год, вариант 3

1. Найдите наибольшее целое число, меньшее числа

$$\sqrt{7} + \sqrt{8}.$$

□

2. Дана последовательность a_1, a_2, a_3, \dots действительных чисел, удовлетворяющих при каждом натуральном $n \geq 3$ равенству

$$a_n = (-1)^n \cdot 3 \cdot a_{n-1} + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}.$$

Найдите $\sqrt[2024]{a_{2025}}$ если известно, что $a_1 = 1$ и $a_2 = 4$.

□

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\log_2^2(x^{\sqrt{2}}) - 3 \log_4 x^6 + 13} > \log_2\left(\frac{x}{2}\right).$$

$$(\infty; 9] \cap (8; 0) \ni x$$

4. Решите уравнение

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{12}{\sin^2 2x} + \frac{12}{\sin x \sin 2x} = \frac{3}{\sin^2 x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni \varphi, \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right) \cup \left(\frac{7\pi}{2}, 4\pi\right) \cup \dots$$

5. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC отмечены точки D, E, F соответственно. На BD и на FC как на диаметрах построены окружности. Эти окружности касаются отрезка AE в одной и той же точке. Найдите DF , если известно, что

$$AB : AC = 2 : 3, \quad BD : FC = 1 : 2$$

и что $BC = 12$.

□

6. Положительные действительные числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_7$ удовлетворяют неравенствам

$$a_i + a_j \geq a_{i+j}$$

при всех натуральных i, j таких, что

$$i + j \leq 7.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_4}{4} + \frac{a_5}{5} + \frac{a_6}{6} + \frac{a_7}{7}}{a_7}.$$

□ I

7. Радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, равен 1. Радиус окружности, вписанной в основание этой пирамиды, равен $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Найдите радиус сферы, описанной около этой пирамиды.

□ $\frac{9}{2} + 1$