ДВИ по математике в МГУ

2015 год

1. Найдите $f(2)$, если $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{3}{x} + \frac{1}{10}$.

$\boxed{2}$

2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 - 7x + 5 = 0$.

$\boxed{39}$

3. Решите неравенство $\cos x + \sqrt{2}\cos 2x \geqslant 0$.

$\boxed{x \in \left[-\frac{5\pi}{12} + 2\pi n;\, \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12} + 2\pi n;\, \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right],\ n \in \mathbb{Z}}$

4. Решите уравнение $\log_x |2x^2 - 3| = 4\log_{|2x^2-3|} x$.

$\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}}$

5. Окружность радиуса $\frac{3}{2}$ касается середины стороны BC треугольника ABC и пересекает сторону AB в точках D и E, так что $AD : DE : EB = 1 : 2 : 1$. Чему может равняться AC, если $\angle BAC = 30°$?

$\boxed{\sqrt{3} \pm \sqrt{2}}$

6. Велосипедист Василий выехал из пункта А в пункт Б. Проехав треть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадёжно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошёл пешком обратно в пункт А за новым велосипедом. В момент поломки из пункта А выехал мотоциклист Григорий. На каком расстоянии от пункта А он встретит Василия, если пункт Б отстоит от пункта А на 4 км, а Василий доберётся до пункта А тогда же, когда Григорий до пункта Б? Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.

$\boxed{1 \text{ км}}$

7. В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и рёбрами AA', BB', CC' вписана сфера. Найдите её радиус, если известно, что расстояние между прямыми AE и BD равно $\sqrt{13}$, где E и D — точки, лежащие на $A'B'$ и $B'C'$ соответственно, и $A'E : EB' = B'D : DC' = 1 : 2$.

$\boxed{\frac{13}{6}}$

8. Найдите все пары (α, β), при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4 - 3\sin\alpha}{2 + \cos 2\alpha} + \frac{2 + \cos 2\alpha}{\beta^2 + \beta + 1} + \frac{\beta^2 + \beta + 1}{\sqrt{\beta} + 1} + \frac{\sqrt{\beta} + 1}{4 - 3\sin\alpha}.$$

$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n\ (n \in \mathbb{Z}),\ \beta = 0}$