

Олимпиада «Бельчонок» по математике

10 класс, 2023 год, вариант 3

1. Действительные числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz, \\ 2y + 2z = x^2. \end{cases}$$

Найдите возможные значения $x + y + z$.

2. Ира выбирает три разных цифры из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, а Артём выбирает три разных цифры из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Каждый из них записывает свои цифры в порядке убывания. Какова вероятность, что трёхзначное число Артёма больше трёхзначного числа Иры?

3. Известно, что $abc = 1$, $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что максимальное из чисел a, b, c больше 1, а два других числа меньше 1.

4. Даны две концентрические окружности ω_6 и ω_{10} с центром O . Радиусы окружностей ω_6 и ω_{10} равны соответственно 6 и 10. В окружности ω_6 проведена хорда AB . Через точку B проведена перпендикулярно AB прямая, пересекающая окружность ω_{10} в точках C и D . Точка G — середина отрезка AC , точка H — середина отрезка AD , точка M — середина OB . Докажите, что точки G и H лежат на окружности с центром M , и найдите радиус этой окружности.

5. 10 девушек встали в хоровод. Из всех компаний этих девушек численностью не более 6 человек сколько таких, в которые входят хотя бы 3 девушки, стоящие в хороводе подряд?