

Олимпиада «Бельчонок» по математике

10 класс, 2023 год, вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3, \\ 2y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases} \quad (x, y \neq 0).$$

2. Лена выбирает три разных цифры из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, а Федя выбирает три разных цифры из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Каждый из них записывает свои цифры в порядке убывания. Какова вероятность, что трёхзначное число Феда больше трёхзначного числа Лены?

3. Даны 4 действительных числа $\{a_i\}$: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Эти числа в некотором порядке расставляются по окружности, и находится величина A , равная сумме квадратов разностей соседних чисел. При каком расположении чисел $\{a_i\}$ величина A имеет наименьшее значение?

4. Даны две концентрические окружности ω_5 и ω_8 с центром O . Радиусы окружностей ω_5 и ω_8 равны соответственно 5 и 8. В окружности ω_5 проведена хорда AB . Через точку B проведена перпендикулярно AB прямая, пересекающая окружность ω_8 в точках C и D . Точка G — середина отрезка AC , точка M — середина OB . Найдите длину отрезка GM .

5. 10 девушек встали в хоровод. Из всех компаний этих девушек численностью от 5 до 7 человек включительно сколько таких, в которые входят хотя бы 3 девушки, стоящие в хороводе подряд?