

Олимпиада «Бельчонок» по математике**10 класс, 2022 год, вариант 4**

1. Известно, что $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Докажите, что для любого нечётного натурального n существуют n различных чисел, сумма кубов которых равна кубу натурального числа.
2. На 8 шарах написано по числу: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Сколькими способами можно разложить шары в три коробки так, чтобы ни в одной коробке не было числа и его делителя?
3. Трёхзначное число состоит из разных цифр. Между первой и второй цифрами, а также между второй и третьей цифрами, вписали по n нулей. Докажите, что существует больше одного исходного трёхзначного числа такого, что полученное $(2n + 3)$ -значное число является квадратом целого числа при любых натуральных n .
4. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника KLM с углом $\angle L = 30^\circ$. Луч LO пересекает отрезок KM в точке Q . Точка P — середина дуги OM описанной окружности треугольника QOM , не содержащей точку Q . Докажите, что точки K, L, P, Q лежат на одной окружности.
5. Какое наибольшее число клеток квадрата 8×8 можно закрасить так, чтобы центры любых четырёх закрашенных клеток не являлись вершинами прямоугольника, стороны которого параллельны краям квадрата?