

Олимпиада «Бельчонок» по математике**11 класс, 2018 год, вариант 2**

1. На поляне в лесу собралось 25 бельчат. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Один из бельчат сказал: «Среди всех бельчат на поляне, кроме меня, нечётное число лжецов». После чего убежал в лес, и бельчат на поляне осталось 24. Еще один из бельчат сказал ту же самую фразу, после чего тоже убежал в лес, и их осталось 23. И так далее, они по одному говорили эту фразу и убегали в лес. Сейчас на поляне осталось 10 бельчат. Сколько лжецов могло быть среди бельчат на поляне изначально?
2. В клетках таблицы 19×19 расставлены положительные числа. В каждой строке эти числа образуют арифметическую прогрессию, а в каждом столбце квадраты этих чисел образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что произведение числа в левом верхнем углу и числа в правом нижнем углу равно произведению чисел в двух других углах.
3. Найдите все натуральные числа n , для каждого из которых существуют такие натуральные числа p и q , что $(n^2 + 2n + 3)^p = (2n + 1)^q$.
4. На продолжении стороны BC треугольника ABC взята точка D так что прямая AD — касательная к описанной окружности ω треугольника ABC . Прямая AC пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E , причем $AC : CE = 1 : 2$. Оказалось, что биссектриса угла ADE касается окружности ω . Найдите углы треугольника ABC .
5. Найдите все функции $f(x)$ такие, что для всех действительных x и y выполняется равенство $f(x^3 + y^3) = x^2 f(x) + y f(y^2)$.