

Олимпиада «Бельчонок» по математике**11 класс, 2018 год, вариант 1**

1. На поляне в лесу собралось 25 бельчат. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо хитрец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, хитрецы говорят правду, если предыдущий бельчонок лгал, и лгут, если предыдущий бельчонок говорил правду (хитрец никогда не говорит первым). Каждый бельчонок заявил другим бельчатам: «Среди вас есть хотя бы по одному рыцарю, лжецу и хитрецу». Сколько рыцарей могло быть на поляне?
2. В клетках таблицы 17×17 расставлены положительные числа. В каждой строке эти числа образуют арифметическую прогрессию, а в каждом столбце квадраты этих чисел образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что произведение числа в левом верхнем углу и числа в правом нижнем углу равно произведению чисел в двух других углах.
3. Найдите все натуральные числа n , для каждого из которых существуют такие натуральные числа p и q , что $(n^2 + 2)^p = (2n - 1)^q$.
4. Дан прямоугольный треугольник ABC . На продолжении гипотенузы BC выбрана точка D так, что прямая AD — касательная к описанной окружности ω треугольника ABC . Прямая AC пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E . Оказалось, что биссектриса угла ADE касается окружности ω . В каком отношении точка C делит отрезок AE ?
5. Найдите все функции $f(x)$ такие, что для всех действительных x и y выполняется равенство $f(f(x) - y^2) = f(x^2) + y^2 f(y) - 2f(xy)$.