

Олимпиада «Будущие исследователи — будущее науки»**Математика, 11 класс, 2026 год**

1. При каких значениях параметра a уравнение

$$5 + \cos 2x = 4a + 4a \sin x$$

имеет решение?

$5 \leq a$

2. Дан тетраэдр $SABC$. Требуется пересечь его плоскостью, параллельной основанию ABC , и выбрать точку M в плоскости основания так, чтобы объем тетраэдра $MA_1B_1C_1$ был наибольшим, где A_1, B_1, C_1 — точки пересечения плоскости сечения с боковыми ребрами тетраэдра $SABC$. Найдите отношение объема искомого тетраэдра $MA_1B_1C_1$ к объему тетраэдра $SABC$.

$4/27$

3. Круг разбит на 125 секторов, занумерованных по часовой стрелке последовательными числами от 1 до 125 (начиная с некоторого сектора). Вначале в одном из секторов сидит кузнечик. Затем он прыгает, перемещаясь каждый раз по кругу на количество секторов по часовой стрелке, равное номеру текущего сектора.

а) Докажите, что существует по меньшей мере 25 секторов, в которых кузнечик не сможет побывать.

б) Какое наибольшее количество секторов он может посетить?

001 (9)

4. Последовательность a_n задается рекуррентно:

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{10}{9}.$$

Какова вероятность, что случайно выбранный член последовательности является целым числом?

9/1

5. Учитель написал на доске 9 различных положительных чисел и дал задание 6 ученикам вычислить и записать в тетради:

- Ане — набор произведений всевозможных пар чисел на доске,
- Боре — набор произведений всевозможных троек,
- и т. д.,
- Егору — набор произведений всевозможных «семёрок».

Могло ли в результате оказаться так, что для каждого из учеников есть другой ученик, у которого записан точно такой же набор? (Равные числа в наборе повторяются столько раз, сколько получается одинаковых произведений.)

□