Олимпиада «Будущие исследователи — будущее науки»

Математика, 10 класс, 2026 год

1. Дано сто чисел: $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{100}$. Вычислим 98 разностей (через одно число):

$$a_1 = \sqrt{3} - 1, \quad a_2 = \sqrt{4} - \sqrt{2}, \quad \ldots, \quad a_{98} = \sqrt{100} - \sqrt{98}.$$

Докажите, что $17{,}5 < a_1 + a_2 + \ldots + a_{98} < 17{,}6$.

2. Существуют ли рациональные, но не целые, числа x, y, для которых

а) числа $2x^2 + y^2$ и $x^2 - 4y^2$ ненулевые целые;

б) числа $2x^2 + y^2$ и $3x^2 - 4y^2$ целые?

а) существуют; б) не существуют

3. Дан треугольник ABC площади S с острыми углами A и C. Для текущей точки M на стороне AC рассматриваются точки M_1 и M_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ABM и CBM. Чему равно наименьшее значение площади треугольника M_1MM_2?

$S/4$

4. Круг разбит на 125 секторов, занумерованных по часовой стрелке последовательными числами от 1 до 125 (начиная с некоторого сектора). Вначале в одном из секторов сидит кузнечик. Затем он прыгает, перемещаясь каждый раз по кругу на количество секторов по часовой стрелке, равное номеру текущего сектора.

а) Докажите, что существует по меньшей мере 25 секторов, в которых кузнечик не сможет побывать.

б) Какое наибольшее количество секторов он может посетить?

б) 100

5. Последовательность a_n задается рекуррентно:

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{10}{9}.$$

Какова вероятность, что случайно выбранный член последовательности является целым числом?

$1/6$