Олимпиада «Будущие исследователи — будущее науки»

Математика, 11 класс, 2025 год

1. Решите уравнение $2\cos^4 x - \sin^3 x = 1$.

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;\ (-1)^{n+1} \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi n;\ n \in \mathbb{Z}$

2. Дан прямоугольный треугольник ABC (C — вершина прямого угла) с острым углом α при вершине A. Две окружности с центрами O_1 и O_2 проходят через вершины A, C и B, C, соответственно, и касаются прямой AB. Найдите отношение площадей треугольников ABC и O_1MO_2, где M — середина гипотенузы AB.

$\sin^2 2\alpha$

3. Для данного треугольника ABC с соответствующими сторонами a, b, c рассматривают уравнение

$$ax^4 + bx = c.$$

Докажите, что у этого уравнения ровно два корня, они разных знаков, причем отрицательный корень по модулю больше положительного.

4. Рассмотрим уравнение

$$9 \cdot x^{6x} = 1.$$

1. Определите количество положительных корней этого уравнения.
2. Есть ли у этого уравнения отрицательные корни?

1) 2 корня; 2) нет

5. Дан выпуклый n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ и точка M на плоскости. Пусть M_i — проекция M на прямую A_iA_{i+1} (где $A_{n+1} = A_1$). Докажите, что если выполняется равенство

$$4\left(A_1M_1^2 + A_2M_2^2 + \ldots + A_nM_n^2\right) = A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + \ldots + A_nA_1^2,$$

то около n-угольника можно описать окружность.