

Олимпиада «Будущие исследователи — будущее науки»

Математика, 11 класс, 2023 год

1. Решите неравенство $2 \cos(\cos x) > 1$.
2. Решите уравнение $(\sqrt{2023} + \sqrt{2022})^x - (\sqrt{2023} - \sqrt{2022})^x = \sqrt{8088}$.
3. Дан треугольник, у которого длины сторон — числа рациональные. Докажите, что рациональным числом является
 - а) отношение R/r , где R и r — радиусы описанной и вписанной окружности;
 - б) значение $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$, где α, β, γ — углы треугольника.
4. Дано несколько прямоугольных параллелепипедов в пространстве. Известно, что у каждой пары параллелепипедов есть хотя бы одна общая точка, а их рёбра соответственно параллельны. Обязательно ли все параллелепипеды имеют общую точку?
5. а) Докажите, что первые 11 натуральных чисел $1, 2, \dots, 11$ нельзя переставить так, чтобы соседние числа отличались либо на 3, либо на 5.
б) Можно ли сделать это для чисел $1, 2, \dots, 12$?