

Олимпиада «Будущие исследователи — будущее науки»

Математика, 11 класс, 2022 год

1. Решите неравенство

$$f(f(x)) < (f(x))^2,$$

где $f(x) = 2x^2 - 1$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = (\arcsin x) \cdot (\arccos x)$.

3. Числа x, y удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{x^3 + y} + \sqrt{y^3 + x} = \sqrt{x^3 + x} + \sqrt{y^3 + y}.$$

Можно ли утверждать, что $x = y$?

4. Докажите, что существует бесконечное множество троек натуральных чисел x, y, z , удовлетворяющих соотношению $x^2 + y^2 = z^{2022}$.

5. На координатной плоскости дан прямоугольник с целочисленными координатами вершин, отличный от квадрата. Докажите, что можно провести несколько прямых, параллельных сторонам прямоугольника, так, что прямоугольник разобьется на квадраты с целочисленными координатами вершин.