

Олимпиада «Будущие исследователи — будущее науки»

Математика, 10 класс, 2021 год

1. Решите уравнение

$$(x^4 + x + 1) \left(\sqrt[3]{80} - \sqrt[3]{0,01} \right) = 2 \left(\sqrt[3]{5,12} + \sqrt[3]{0,03375} \right).$$

2. Сколько существует прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, у которых один из катетов равен 2021?

3. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $\angle BAM = \angle BCA$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC , лежит на прямой, проходящей через точку B и перпендикулярной AM .

4. Последовательность целых чисел a_n задается следующим образом: $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$, $a_1 = 100$. Докажите, что любые два различных члена последовательности взаимно просты.

5. Дано 10 чисел: 10, 20, 30, ..., 100. С ними можно проделать следующую операцию: выбрать любые три и прибавить к выбранным числам по единице. С полученными 10 числами проделывается та же операция и т. д. Можно ли в результате нескольких операций получить:

а) все одинаковые числа?

б) все числа, равные 200?