

Олимпиада «Будущие исследователи — будущее науки»

Математика, 11 класс, 2019 год

1. Найдите все значения параметра a , для которых уравнение $|x^3 + 1| = a(x + 1)$ имеет три корня.
2. Даны коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Его график пересекает оси координат в трёх точках, и через эти точки провели окружность, которая пересекла ось Oy ещё в одной точке. Найдите ординату этой четвертой точки.
3. На боковых ребрах AD, BD и CD тетраэдра $ABCD$ взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1 такие, что плоскость $A_1B_1C_1$ параллельна основанию ABC . Точка D_1 лежит в основании. Докажите, что объем тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ не превосходит $\frac{4}{27}V$, где V — объем тетраэдра $ABCD$.
4. Сколько решений в целых числах x, y имеет уравнение

$$|3x + 2y| + |2x + y| = 100?$$

5. Существует ли такое действительное α , что оба числа $2 \sin \alpha + \sqrt{3}$ и $2 \cos \alpha - \sqrt{3}$ рациональны?