

Олимпиада «Будущие исследователи — будущее науки»

Математика, 11 класс, 2018 год

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$\log_x y + \log_y x > 2.$$

2. Имеется n гирек весом $1, 2, \dots, n$ (гр) и двухчашечные весы. Можно ли все гирьки разложить на весах так, чтобы на одной чаше было вдвое больше гирек, чем на другой, и весы уравновесились:

а) при $n = 90$;

б) при $n = 99$?

3. Дана прямая на плоскости и на ней отмечено несколько (больше двух) точек. Докажите, что можно отметить еще одну точку на плоскости (вне данной прямой) так, чтобы среди всех треугольников с отмеченными вершинами было больше половины остроугольных.

4. На координатной плоскости начерчена парабола $y = x^2$. На положительной полуоси Oy взяли точку A и через неё провели две прямые с положительными угловыми коэффициентами. Пусть M_1, N_1 и M_2, N_2 — точки пересечения с параболой первой и второй прямой соответственно. Найдите ординату точки A , если известно, что $\angle M_1ON_1 = \angle M_2ON_2$, где O — начало координат.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x = \sqrt{y}, \\ 2^{-y} = x^3. \end{cases}$$