

**Олимпиада «Будущие исследователи — будущее науки»****Математика, 9 класс, 2015 год**

1. В пятизначном числе зачеркнули одну цифру и полученное четырехзначное число сложили с исходным. Сумма оказалась равной 54 321. Найдите исходное число.
2. Даны четыре действительных числа  $a, b, c, d$ , которые удовлетворяют двум соотношениям:  $a + b = c + d$  и  $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$ .
  - а) Докажите, что  $a^5 + b^5 = c^5 + d^5$ ;
  - б) Можно ли сделать вывод, что  $a^4 + b^4 = c^4 + d^4$ ?
3. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  точки  $P$  и  $Q$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$ . Оказалось, что прямая  $PQ$  делит диагональ  $AC$  пополам. Докажите, что  $PQ$  делит и диагональ  $BD$  пополам.
4. Дана квадратная таблица, в некоторых клетках которой стоят крестики. Назовем строку таблицы нечетной, если в ней нечетное количество крестиков. Аналогично, в нечетном столбце — нечетное количество крестиков.
  - а) Может ли оказаться так, что в таблице ровно 20 нечетных строк и 15 нечетных столбцов?
  - б) Можно ли в таблице  $16 \times 16$  расставить 126 крестиков так, чтобы все строки и столбцы оказались нечетными?
5. Дан прямоугольный треугольник  $ABC$  с катетами  $AC = a$  и  $CB = b$ . Найдите
  - а) сторону квадрата (с вершиной  $C$ ) наибольшей площади, целиком лежащего в треугольнике  $ABC$ ;
  - б) размеры прямоугольника (с вершиной  $C$ ) наибольшей площади, целиком лежащего в треугольнике  $ABC$ .