

Вписанная сфера

ЗАДАЧА 1. Вспомните, как *доказывается* планиметрическая формула $S = pr$. Установите её стереометрический аналог, перенеся идею доказательства в пространство.

ЗАДАЧА 2. («Физтех», 2017) Основание треугольной пирамиды $ABCD$ — правильный треугольник ABC . Объём пирамиды равен $\frac{25}{\sqrt{3}}$, а её высота, проведённая из вершины D , равна 3. Точка M — середина ребра CD . Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды $ABCM$ и $ABDM$, равны между собой.

- Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре AB .
- Найдите все возможные значения длины ребра CD , если дополнительно известно, что грани BSC и ASC взаимно перпендикулярны.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ или } \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{9 + \left(\frac{25}{3}\right)^2} \text{ (в } \square)$$

ЗАДАЧА 3. (МГУ, ДВИ, 2013.7) В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC , такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'B'$ верхнего основания (параллельном AB) отмечена точка D , так что $A'D : DB' = 1 : 2$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $ABC'D$, если высота призмы равна 1.

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}\right)} \text{ (в } \square)$$

ЗАДАЧА 4. (МГУ, мехмат, 1999-05.6) Основанием пирамиды $SABCD$ является трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такими, что $BC : AD = 2 : 5$. Диагонали трапеции пересекаются в точке E , а центр O вписанной в пирамиду сферы лежит на отрезке SE и делит его в отношении $SO : OE = 7 : 2$. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если площадь боковой грани SBC равна 8.

□ 121

ЗАДАЧА 5. (Всеросс., 2013, финал, 11.2) Вписанная и невписанная сферы треугольной пирамиды $ABCD$ касаются её грани BSC в различных точках X и Y . Докажите, что треугольник AXY тупоугольный.

ЗАДАЧА 6. (Всеросс., 2003, ОЭ, 11) Дан тетраэдр $ABCD$. Вписанная в него сфера σ касается грани ABC в точке T . Сфера σ' касается грани ABC в точке T' и продолжений граней ABD , BSC , CAD . Докажите, что прямые AT и AT' симметричны относительно биссектрисы угла BAC .

ЗАДАЧА 7. (ММО, 1984, 10) Треугольное сечение куба касается вписанного в куб шара. Докажите, что площадь этого сечения меньше половины площади грани куба.

ЗАДАЧА 8. (Всеросс., 1994, финал, 11) Высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 тетраэдра $ABCD$ пересекаются в центре H сферы, вписанной в тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что тетраэдр $ABCD$ — правильный.

ЗАДАЧА 9. (*Всеросс., 1997, финал, 11*) Сфера, вписанная в тетраэдр, касается одной из его граней в точке пересечения биссектрис, другой — в точке пересечения высот, третьей — в точке пересечения медиан. Докажите, что тетраэдр правильный.

ЗАДАЧА 10. (*Всеросс., 1999, ОЭ, 11*) Многогранник описан около сферы. Назовем его грань *большой*, если проекция сферы на плоскость грани целиком попадает в грань. Докажите, что больших граней не больше 6.

ЗАДАЧА 11. (*Всеросс., 1998, финал, 11*) В тетраэдр $ABCD$, длины всех рёбер которого не более 100, можно поместить две непересекающиеся сферы диаметра 1. Докажите, что в него можно поместить одну сферу диаметра 1,01.

ЗАДАЧА 12. (*Турнир городов, 2004, 10–11*) У тетраэдра $ABCD$ сумма площадей двух граней (с общим ребром AB) равна сумме площадей оставшихся граней (с общим ребром CD). Докажите, что середины рёбер BC , AD , AC и BD лежат в одной плоскости, причём эта плоскость содержит центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$.

ЗАДАЧА 13. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2005, 10–11*) В пирамиду, основанием которой служит параллелограмм, можно вписать сферу. Докажите, что суммы площадей её противоположных боковых граней равны.

ЗАДАЧА 14. (*ММО, 1989, 10*) На рёбрах произвольного тетраэдра выбрано по точке. Через каждую тройку точек, лежащих на рёбрах с общей вершиной, проведена плоскость. Докажите, что если три из четырёх проведённых плоскостей касаются вписанного в тетраэдр шара, то и четвёртая плоскость также его касается.

ЗАДАЧА 15. (*Всеросс. по геометрии, 2005, 11*) Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается его граней в точках A' , B' , C' , D' . Отрезки AA' и BB' пересекаются, и точка их пересечения лежит на вписанной сфере. Доказать, что отрезки CC' и DD' тоже пересекаются на вписанной сфере.

ЗАДАЧА 16. (*Всеросс. по геометрии, 2014, 10*) Дана описанная четырёхугольная пирамида $ABCD$. Противоположные стороны основания пересекаются в точках P и Q , причём точки A и B лежат на отрезках PD и PC . Вписанная сфера касается боковых граней ABS и BCS в точках K и L . Докажите, что если прямые PK и QL пересекаются, то точка касания сферы и основания лежит на отрезке BD .

ЗАДАЧА 17. (*Всеросс. по геометрии, 2009, 10*) Дана четырёхугольная пирамида, в которую можно вписать сферу. Точку касания этой сферы с основанием пирамиды спроектировали на рёбра основания. Докажите, что все проекции лежат на одной окружности.

ЗАДАЧА 18. (*ММО, 2014, 11*) Поверхность выпуклого многогранника $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ состоит из восьми треугольных граней $A_iB_jC_k$, где i, j, k меняются от 1 до 2. Сфера с центром в точке O касается всех этих граней. Докажите, что точка O и середины трёх отрезков A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 лежат в одной плоскости.

ЗАДАЧА 19. (*ММО, 1970, 10*) Около сферы радиуса 10 описан некоторый 19-гранник. Доказать, что на его поверхности найдутся две точки, расстояние между которыми больше 21.