

## Уравнения и неравенства на ММО и Всероссе

Данный листок посвящён задачам, которые внешне кажутся не столько олимпиадными, сколько экзаменационными. Однако они регулярно появляются на региональном и заключительном этапах Всероссийской олимпиады школьников по математике и на Московской математической олимпиаде.

Разумеется, название «уравнения и неравенства» несколько условно и не охватывает целиком всё содержание листка. Сюда же относятся задачи, связанные с тождественными преобразованиями и оценками тригонометрических и логарифмических выражений, исследованием функций и их графиков и т. п.

### Московская математическая олимпиада

После введения в 2011 году формата «первый день — второй день» (для 11 класса) такие задачи стали появляться на ММО каждый год.

**1.** (ММО, 2019, 11.1) Пользуясь равенством  $\lg 11 = 1,0413\dots$ , найдите наименьшее число  $n > 1$ , для которого среди  $n$ -значных чисел нет ни одного, равного некоторой натуральной степени числа 11.

**2.** (ММО, 2019, 11.2) Существует ли такая гипербола, задаваемая уравнением вида  $y = \frac{a}{x}$ , что в первой координатной четверти ( $x > 0, y > 0$ ) под ней лежат ровно 82 точки с целочисленными координатами?

**3.** (ММО, 2019, 11.4) Докажите, что для любого натурального числа  $n \geq 2$  и для любых действительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , удовлетворяющих условию  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$ , уравнение

$$a_1(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_n) + a_2(x - a_1)(x - a_3) \dots (x - a_n) + \dots + a_n(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{n-1}) = 0$$

имеет хотя бы один действительный корень.

**4.** (ММО, 2018, 11.1) Решите уравнение

$$x^3 + (\log_2 5 + \log_3 2 + \log_5 3) x = (\log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 2) x^2 + 1.$$

**5.** (ММО, 2018, 11.3) Пусть  $x$  и  $y$  — пятизначные числа, в десятичной записи которых использованы все десять цифр ровно по одному разу. Найдите наибольшее возможное значение  $x$ , если

$$\operatorname{tg} x^\circ - \operatorname{tg} y^\circ = 1 + \operatorname{tg} x^\circ \operatorname{tg} y^\circ$$

( $x^\circ$  обозначает угол в  $x$  градусов).

1ZL86

**6.** (ММО, 2017, 11.2) Незнайка знаком только с десятичными логарифмами и считает, что логарифм суммы двух чисел равен произведению их логарифмов, а логарифм разности двух чисел равен частному их логарифмов. Может ли Незнайка подобрать хотя бы одну пару чисел, для которой действительно верны одновременно оба этих равенства?

7. (ММО, 2017, 11.3) Пусть  $x_0$  — положительный корень уравнения  $x^{2017} - x - 1 = 0$ , а  $y_0$  — положительный корень уравнения  $y^{4034} - y = 3x_0$ .

а) Сравните  $x_0$  и  $y_0$ .

б) Найдите десятый знак после запятой числа  $|x_0 - y_0|$ .

8. (ММО, 2016, 11.2) Существует ли такое значение  $x$ , что выполняется равенство

$$\arcsin^2 x + \arccos^2 x = 1?$$

9. (ММО, 2015, 11.1) Сумма нескольких не обязательно различных положительных чисел не превосходила 100. Каждое из них заменили на новое следующим образом: сначала прологарифмировали по основанию 10, затем округлили стандартным образом до ближайшего целого числа и, наконец, возвели 10 в найденную целую степень. Могло ли оказаться так, что сумма новых чисел превышает 300?

10. (ММО, 2015, 11.2) Какое наибольшее количество множителей вида  $\sin \frac{n\pi}{x}$  можно вычеркнуть в левой части уравнения

$$\sin \frac{\pi}{x} \sin \frac{2\pi}{x} \sin \frac{3\pi}{x} \dots \sin \frac{2015\pi}{x} = 0$$

так, чтобы число его натуральных корней не изменилось?

11. (ММО, 2014, 11.2) Найдите все значения  $a$ , для которых найдутся такие  $x$ ,  $y$  и  $z$ , что числа  $\cos x$ ,  $\cos y$  и  $\cos z$  попарно различны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию, при этом числа  $\cos(x + a)$ ,  $\cos(y + a)$  и  $\cos(z + a)$  также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию.

12. (ММО, 2014, 11.2) Найдите все такие  $a$  и  $b$ , что

$$|a| + |b| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

и при всех  $x$  выполнено неравенство

$$|a \sin x + b \sin 2x| \leq 1.$$

13. (ММО, 2013, 11.2) Найдите такое значение  $a > 1$ , при котором уравнение  $a^x = \log_a x$  имеет единственное решение.

14. (ММО, 2013, 11.3) Сравните числа

$$\left(1 + \frac{2}{3^3}\right) \left(1 + \frac{2}{5^3}\right) \dots \left(1 + \frac{2}{2013^3}\right) \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

15. (ММО, 2012, 11.2) Для заданных значений  $a, b, c$  и  $d$  оказалось, что графики функций

$$y = 2a + \frac{1}{x - b} \quad \text{и} \quad y = 2c + \frac{1}{x - d}$$

имеют ровно одну общую точку. Докажите, что графики функций

$$y = 2b + \frac{1}{x - a} \quad \text{и} \quad y = 2d + \frac{1}{x - c}$$

также имеют ровно одну общую точку.

16. (ММО, 2011, 11.2) Сравните между собой наименьшие положительные корни многочленов

$$x^{2011} + 2011x - 1 \quad \text{и} \quad x^{2011} - 2011x + 1.$$

17. (ММО, 2010, 10.3) Можно ли, применяя к числу 2 функции  $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}, \operatorname{arcsin}, \operatorname{arccos}, \operatorname{arctg}, \operatorname{arctg}$  в любом количестве и в любом порядке, получить число 2010?

18. (ММО, 2010, 11.1) Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$\frac{1}{a + \frac{2010}{b + \frac{1}{c}}},$$

где  $a, b, c$  — попарно различные ненулевые цифры?

19. (ММО, 2007, 11) Значение  $a$  подобрано так, что число корней первого из уравнений

$$4^x - 4^{-x} = 2 \cos ax, \quad 4^x + 4^{-x} = 2 \cos ax + 4$$

равно 2007. Сколько корней при том же  $a$  имеет второе уравнение?

20. (ММО, 2006, 10) Может ли сумма тангенсов углов одного треугольника равняться сумме тангенсов углов другого, если один из этих треугольников остроугольный, а другой тупоугольный?

21. (ММО, 2006, 11) Какие значения может принимать разность возрастающей арифметической прогрессии  $a_1, a_2, \dots, a_5$ , все члены которой принадлежат отрезку  $[0; \frac{3\pi}{2}]$ , если числа  $\cos a_1, \cos a_2, \cos a_3$ , а также числа  $\sin a_3, \sin a_4$  и  $\sin a_5$  в некотором порядке тоже образуют арифметические прогрессии?

22. (ММО, 2005, 10) Существует ли плоский четырёхугольник, у которого тангенсы всех внутренних углов равны?

23. (ММО, 2005, 11) Числа  $a$  и  $b$  таковы, что первое уравнение системы

$$\begin{cases} \sin x + a = bx, \\ \cos x = b \end{cases}$$

имеет ровно два решения. Докажите, что система имеет хотя бы одно решение.

24. (ММО, 2004, 11) Для заданных натуральных чисел  $k_0 < k_1 < k_2$  выясните, какое наименьшее число корней на промежутке  $[0; 2\pi)$  может иметь уравнение вида

$$\sin(k_0x) + A_1 \sin(k_1x) + A_2 \sin(k_2x) = 0$$

где  $A_1, A_2$  — вещественные числа.

25. (ММО, 2003, 10) Дана бесконечная последовательность многочленов  $P_1(x), P_2(x), \dots$ . Всегда ли существует конечный набор функций  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x)$ , композициями которых можно записать любой из них (например,  $P_1(x) = f_2(f_1(f_2(x)))$ )?

26. (ММО, 1997, 11) Вычислите

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x)) dx.$$

27. (ММО, 1995, 10) Известно число  $\sin \alpha$ . Какое наибольшее число значений может принимать а)  $\sin \frac{\alpha}{2}$ ; б)  $\sin \frac{\alpha}{3}$ ?

28. (ММО, 1993, 11) Известно, что  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = p$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = q$ . Найти  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ .

$\frac{d-b}{bd}$
------------------

29. (ММО, 1992, 10) Докажите, что если сумма косинусов углов четырёхугольника равна нулю, то он — параллелограмм, трапеция или вписанный четырёхугольник.

30. (ММО, 1990, 11) Найдите наибольшее значение выражения

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

31. (ММО, 1988, 10) Существует ли на координатной плоскости прямая, относительно которой симметричен график функции  $y = 2^x$ ?

32. (ММО, 1987, 10) а) Доказать, что из трёх положительных чисел всегда можно выбрать такие два числа  $x$  и  $y$ , что

$$0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq 1.$$

б) Верно ли, что указанные два числа можно выбрать из любых четырёх чисел?

33. (ММО, 1986, 10) Решите уравнение  $x^{x^4} = 4$  ( $x > 0$ ).

34. (ММО, 1984, 10) Не используя калькуляторов, таблиц и т. п., докажите неравенство

$$\sin 1 < \log_3 \sqrt{7}.$$

35. (ММО, 1983, 10) На доске после занятия осталась запись: «Вычислить»

$$t(0) - t\left(\frac{\pi}{5}\right) + t\left(\frac{2\pi}{5}\right) - t\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \dots + t\left(\frac{8\pi}{5}\right) - t\left(\frac{9\pi}{5}\right),$$

где  $t(x) = \cos 5x + * \cos 4x + * \cos 3x + * \cos 2x + * \cos x + *$ . Увидев её, студент мехмата сказал товарищу, что он может вычислить эту сумму, даже не зная значений стёртых с доски коэффициентов (вместо них в нашей записи \*). Не ошибается ли он?

36. (ММО, 1981, 10) Доказать, что последовательность  $x_n = \sin(n^2)$  не стремится к нулю при  $n$ , стремящемся к бесконечности.

37. (ММО, 1963, 10) Положительные числа  $x, y, z$  обладают тем свойством, что

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z < \pi.$$

Доказать, что сумма этих чисел больше их произведения.

38. (ММО, 1954, 10) Найти все действительные решения уравнения

$$x^2 + 2x \sin(xy) + 1 = 0.$$

39. (ММО, 1952, 10) Найдите соотношение между  $\arcsin \cos \arcsin x$  и  $\arccos \sin \arccos x$ .

40. (ММО, 1948, 9–10) Доказать без помощи таблиц, что

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2.$$

41. (ММО, 1939) Доказать, что

$$\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}.$$

## Всероссийская олимпиада школьников по математике

42. (Всеросс., 2018, финал, 10.1) Найдите количество корней уравнения

$$|x| + |x + 1| + \dots + |x + 2018| = x^2 + 2018x - 2019.$$

43. (Всеросс., 2012, РЭ, 10.5) Дан выпуклый пятиугольник. Петя выписал в тетрадь значения синусов всех его углов, а Вася — значения косинусов всех его углов. Оказалось, что среди выписанных Петей чисел нет четырёх различных. Могут ли все числа, выписанные Васей, оказаться различными?

44. (Всеросс., 2004, ОЭ, 10.1) Сумма положительных чисел  $a, b, c$  равна  $\frac{\pi}{2}$ . Докажите, что

$$\cos a + \cos b + \cos c > \sin a + \sin b + \sin c.$$

45. (Всеросс., 2003, ОЭ, 10.1) Найдите все углы  $\alpha$ , для которых набор чисел  $\sin \alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha$  совпадает с набором  $\cos \alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha$ .

$$\frac{\tau}{ux} + \frac{8}{x} = v$$

46. (Всеросс., 1998, ОЭ, 10.1) Пусть

$$f(x) = x^2 + ax + b \cos x.$$

Найдите все значения параметров  $a$  и  $b$ , при которых уравнения  $f(x) = 0$  и  $f(f(x)) = 0$  имеют совпадающие непустые множества действительных корней.

47. (Всеросс., 1995, финал, 10.1) Решите уравнение  $\cos(\cos(\cos(\cos x))) = \sin(\sin(\sin(\sin x)))$ .

48. (Всеросс., 2009, финал, 10.3) Сколько раз функция

$$f(x) = \cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2009}$$

меняет знак на отрезке  $\left[0, \frac{2009\pi}{2}\right]$ ?

49. (Всеросс., 2011, РЭ, 11.1) Существует ли такое вещественное  $\alpha$ , что число  $\cos \alpha$  иррационально, а все числа  $\cos 2\alpha, \cos 3\alpha, \cos 4\alpha, \cos 5\alpha$  рациональны?

50. (Всеросс., 2010, РЭ, 11.5) Углы треугольника  $\alpha, \beta, \gamma$  удовлетворяют неравенствам  $\sin \alpha > \cos \beta, \sin \beta > \cos \gamma, \sin \gamma > \cos \alpha$ . Докажите, что треугольник остроугольный.

51. (Всеросс., 2009, РЭ, 11.3) Докажите, что  $x \cos x \leq \frac{\pi^2}{16}$  при  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

52. (Всеросс., 2012, РЭ, 11.7) Даны различные натуральные числа  $a, b$ . На координатной плоскости нарисованы графики функций  $y = \sin ax, y = \sin bx$  и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число  $c$ , отличное от  $a, b$  и такое, что график функции  $y = \sin cx$  проходит через все отмеченные точки.

53. (Всеросс., 2005, ОЭ, 11.1) Найдите все пары чисел  $x, y \in (0; \frac{\pi}{2})$ , удовлетворяющие равенству  $\sin x + \sin y = \sin(xy)$ .

54. (Всеросс., 1994, ОЭ, 11.1) Докажите, что при всех  $x, 0 < x < \frac{\pi}{3}$ , справедливо неравенство

$$\sin 2x + \cos x > 1.$$

55. (Всеросс., 2006, ОЭ, 11.5) Докажите, что для каждого  $x$  такого, что  $\sin x \neq 0$ , найдётся такое натуральное  $n$ , что  $|\sin nx| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

56. (Всеросс., 2001, ОЭ, 11.5) Дана последовательность  $\{x_k\}$  такая, что

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = n \sin x_n + 1.$$

Докажите, что последовательность неперiodична.

57. (Всеросс., 1995, ОЭ, 11.5) Для углов  $\alpha, \beta, \gamma$  справедливо неравенство

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \geq 2.$$

Докажите, что

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{5}.$$

58. (Всеросс., 1997, ОЭ, 11.6) Докажите, что если  $1 < a < b < c$ , то

$$\log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) > 0.$$

59. (Всеросс., 2004, ОЭ, 11.7) При каких натуральных  $n$  для любых чисел  $\alpha, \beta, \gamma$ , являющихся величинами углов остроугольного треугольника, справедливо неравенство

$$\sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma < 0?$$

60. (Всеросс., 2017, финал, 11.1) Число  $x$  таково, что обе суммы  $S = \sin 64x + \sin 65x$  и  $C = \cos 64x + \cos 65x$  — рациональные числа. Докажите, что в одной из этих сумм оба слагаемых рациональны.

61. (Всеросс., 2014, финал, 11.1) Существует ли такое положительное число  $a$ , что при всех действительных  $x$  верно неравенство

$$|\cos x| + |\cos ax| > \sin x + \sin ax?$$

62. (Всеросс., 2007, финал, 11.1) Докажите, что при  $k > 10$  в произведении

$$f(x) = \cos x \cos 2x \cos 3x \dots \cos 2^k x$$

можно заменить один  $\cos$  на  $\sin$  так, что получится функция  $f_1(x)$ , удовлетворяющая при всех действительных  $x$  неравенству  $|f_1(x)| \leq \frac{3}{2^{k+1}}$ .

63. (Всеросс., 2006, финал, 11.1) Докажите, что  $\sin \sqrt{x} < \sqrt{\sin x}$  при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

64. (Всеросс., 2005, финал, 11.1) Какое наибольшее конечное число корней может иметь уравнение

$$|x - a_1| + \dots + |x - a_{50}| = |x - b_1| + \dots + |x - b_{50}|,$$

где  $a_1, \dots, a_{50}, b_1, \dots, b_{50}$  — различные числа?

65. (Всеросс., 2003, финал, 11.1) Пусть  $\alpha, \beta, \gamma, \tau$  — такие положительные числа, что при всех  $x$

$$\sin \alpha x + \sin \beta x = \sin \gamma x + \sin \tau x.$$

Докажите, что  $\alpha = \gamma$  или  $\alpha = \tau$ .

66. (Всеросс., 2009, финал, 11.5) Пусть  $1 < a \leq b \leq c$ . Докажите, что

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a \leq \log_b a + \log_c b + \log_a c.$$

67. (Всеросс., 2000, финал, 11.5) Докажите неравенство

$$\sin^n 2x + (\sin^n x - \cos^n x)^2 \leq 1,$$

где  $n$  — любое натуральное число.

68. (Всеросс., 2019, финал, 11.2) Верно ли, что при любых ненулевых целых числах  $a$  и  $b$  система

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(13x) \operatorname{tg}(ay) = 1, \\ \operatorname{tg}(21x) \operatorname{tg}(by) = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

69. (Всеросс., 2002, финал, 11.3) Докажите, что для всех  $x \in (0; \frac{\pi}{2})$  при  $n > m$ , где  $n, m$  — натуральные, справедливо неравенство

$$2 |\sin^n x - \cos^n x| \leq 3 |\sin^m x - \cos^m x|.$$