

Турниры

1. (ОММО, 2019) В футбольном турнире играли семь команд: каждая команда по одному разу сыграла с каждой. В следующий круг отбираются команды, набравшие тринадцать и более очков. За победу даётся 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Какое наибольшее количество команд может выйти в следующий круг?
2. (Всеросс., 2018, ШЭ, 8.3) Рыцарский турнир длится ровно 7 дней. К концу четвёртого дня сэр Ланселот не успел сразиться лишь с одной четвертью от общего числа участников турнира. А сэр Тристан к этому времени сразился ровно с одной седьмой из тех рыцарей, с кем успел сразиться сэр Ланселот. Какое минимальное количество рыцарей могло участвовать в турнире?
3. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.3, 7–9.2) На международный чемпионат по игре в StarCraft съехалось 100 участников. Игра идёт на выбывание, т. е. в каждом матче участвует два игрока, проигравший выбывает из участия в чемпионате, а выигравший — остаётся. Найдите наибольшее возможное количество участников, которые выиграли ровно две партии.
4. (Всеросс., 2017, ШЭ, 10) Участвуя в шахматном турнире, Вася сыграл 52 партии. По старой системе подсчёта очков (1 очко за победу, $1/2$ очка за ничью и 0 очков за поражение) он набрал 35 очков. Сколько очков он набрал по новой системе подсчёта очков (1 очко за победу, 0 очков за ничью и -1 очко за поражение)?
5. (Всеросс., 2016, ШЭ, 11) В турнире по шашкам участвовали ученики 10 и 11 классов. Каждый сыграл с каждым один раз. За победу участник получал 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Одиннадцатиклассников было в 10 раз больше, чем десятиклассников, и они вместе набрали в 4,5 раза больше очков, нежели все десятиклассники. Сколько очков набрал самый успешный десятиклассник?
6. (Всеросс., 2016, МЭ, 10) В турнире участвовали 50 шахматистов. В некоторый момент турнира была сыграна 61 партия, причем каждый участник сыграл либо две партии, либо три (и никто не играл друг с другом дважды). Могло ли оказаться так, что никакие два шахматиста, сыгравшие по три партии, не играли между собой?
7. (ММО, 2017, 9.2) В шахматном турнире каждый участник встретился с каждым один раз. В каждом туре каждый участник проводил по одной встрече. Не меньше чем в половине всех встреч оба участника были земляками (из одного города). Докажите, что в каждом туре была хотя бы одна встреча между земляками.
8. (ММО, 2016, 11) На шахматном турнире для 12 участников каждый сыграл ровно по одной партии с каждым из остальных. За выигрыш давали 1 очко, за ничью — $1/2$, за проигрыш — 0. Вася проиграл только одну партию, но занял последнее место, набрав меньше всех очков. Петя занял первое место, набрав больше всех очков. На сколько очков Вася отстал от Пети?

9. (ОММО, 2015, 9–11) В турнире по мини-футболу принимаются ставки на четыре команды. На первую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 2 (при выигрыше первой команды игрок получает сумму, которую он поставил на эту команду, и плюс двукратную сумму, т. е. получает в три раза больше поставленных денег, а при проигрыше деньги не возвращаются). На вторую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 3, на третью — 1 : 4, на четвертую — 1 : 7. Можно ли так поставить, чтобы выиграть при любом исходе турнира?

10. (ОММО, 2017) В первенстве по футболу участвует 20 команд, которые играют по разу друг с другом. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трёх команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

06

11. (Всеросс., 2015, МЭ, 9) В круговом шахматном турнире участвовало шесть человек: два мальчика и четыре девочки. Могли ли мальчики по итогам турнира набрать в два раза больше очков, чем девочки? (В круговом шахматном турнире каждый игрок играет с каждым по одной партии. За победу дается 1 очко, за ничью 0,5, за поражение — 0.)

12. (ММО, 2015, 10) В турнире по футболу участвует $2n$ команд ($n > 1$). В каждом туре команды разбиваются на n пар и команды в каждой паре играют между собой. Так провели $2n - 1$ тур, по окончании которых каждая команда сыграла с каждой ровно один раз. За победу давалось 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0 очков. Оказалось, что для каждой команды отношение набранных ею очков к количеству сыгранных ею игр после последнего тура не изменилось. Докажите, что все команды сыграли вничью все партии.

13. (ММО, 2016, 10) В однокруговом хоккейном турнире принимало участие 2016 команд. По регламенту турнира за победу даётся 3 очка, за поражение 0 очков, а в случае ничьей назначается дополнительное время, победитель которого получает 2 очка, а проигравший — 1 очко. По окончании турнира Остапу Бендеру сообщили количество очков, набранных каждой командой, на основании чего он сделал вывод, что не менее N матчей закончились дополнительным временем. Найдите наибольшее возможное значение N .

14. (Всеросс., 2016, финал, 10–11) В Национальной Баскетбольной Ассоциации 30 команд, каждая из которых проводит за год 82 матча с другими командами в регулярном чемпионате. Сможет ли руководство Ассоциации разделить команды (не обязательно поровну) на Восточную и Западную конференции и составить расписание игр так, чтобы матчи между командами из разных конференций составляли ровно половину от общего числа матчей?

15. (Всеросс., 2016, РЭ, 11) Есть клетчатая доска 2015×2015 . Дима ставит в k клеток по детектору. Затем Коля располагает на доске клетчатый корабль в форме квадрата 1500×1500 . Детектор в клетке сообщает Диме, накрыта эта клетка кораблём или нет. При каком наименьшем k Дима может расположить детекторы так, чтобы гарантированно восстановить расположение корабля?