Тригонометрические уравнения с радикалами

Этот листок посвящён тригонометрическим уравнениям, в которых тригонометрические функции от неизвестной величины содержатся под знаком корня.

Уравнение вида

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

(Почему отсутствует неравенство $f(x) \geqslant 0$? Оно не нужно — ведь выражение $f(x)$ приравнивается к квадрату выражения $g(x)$ и потому автоматически оказывается неотрицательным.)

Задача. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010*) Решите уравнение

$$\sqrt{41\cos x + 40} + 2\sqrt{5}\sin x = 0.$$

Решение. Будучи переписано в виде

$$\sqrt{41\cos x + 40} = -2\sqrt{5}\sin x,$$

данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 41\cos x + 40 = 20\sin^2 x, \\ \sin x \leqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Преобразуем уравнение (1):

$$20\cos^2 x + 41\cos x + 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{5}{4}, \\ \cos x = -\dfrac{4}{5} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = \arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right) + 2\pi n, \\ x_2 = -\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right) + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Серия x_1 расположена во второй четверти ($\sin x_1 > 0$); для неё неравенство (1) не выполнено. Серия x_2 расположена в третьей четверти ($\sin x_2 < 0$) и удовлетворяет неравенству (1).

Ответ: $-\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача. (*«Физтех», 2013*) Решите уравнение

$$\sqrt{3 + \frac{25}{2}\sin^2 x} = \sqrt{6}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x.$$

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3 + \dfrac{25}{2}\sin^2 x = \left(\sqrt{6}\cos x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)^2, \\ \sqrt{6}\cos x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0, \\ 2\sqrt{3}\cos x - \sin x \geqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

Если положить $\cos x = 0$ в уравнении (2), то получим и $\sin x = 0$ вопреки основному тригонометрическому тождеству. Значит, все решения уравнения (2) удовлетворяют условию $\cos x \neq 0$. Деля обе части уравнения (2) на $\cos^2 x$, получим равносильное уравнение

$$15\,\mathrm{tg}^2\,x + 2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\,x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \\ \mathrm{tg}\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{5} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi n, \\ x = \mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt{3}}{5} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Решения уравнения (2) записаны в виде двух серий с периодом π каждая. Чтобы удобнее было проверять неравенство (2), представим найденные решения в виде четырёх серий с периодом 2π каждая:

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \qquad x_3 = \mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{5} + 2\pi n;$$
$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \qquad x_4 = \pi + \mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{5} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Теперь имеем:

$$2\sqrt{3}\cos x_1 - \sin x_1 = 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} > 0;$$
$$2\sqrt{3}\cos x_2 - \sin x_2 = -2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} < 0;$$
$$2\sqrt{3}\cos x_3 - \sin x_3 = 2\sqrt{3}\cdot\frac{5}{\sqrt{28}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}} > 0;$$
$$2\sqrt{3}\cos x_4 - \sin x_4 = -2\sqrt{3}\cdot\frac{5}{\sqrt{28}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}} < 0.$$

Следовательно, решениями исходного уравнения являются серии x_1 и x_3.

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Уравнение вида

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$$

равносильно одной из двух систем:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Разумеется, достаточно учесть лишь одно из неравенств $f(x) \geqslant 0$ или $g(x) \geqslant 0$, поскольку второе из этих неравенств будет выполнено автоматически ввиду уравнения $f(x) = g(x)$. Какое именно выражение сравнивать с нулём — $f(x)$ или $g(x)$ — диктуется исключительно соображениями удобства.

Задача. (*МГУ, геологич. ф-т, 2005*) Найдите наибольший корень уравнения

$$\sqrt{8 - x - \cos 2x} = \sqrt{10 - x - \sin x}\,.$$

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 8 - x - \cos 2x = 10 - x - \sin x, \\ 10 - x - \sin x \geqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

Преобразуем уравнение (3):

$$2\sin^2 x+\sin x-3=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\sin x=1,\\ \sin x=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Теперь неравенство (3) даёт:

$$10-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)-1\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad n\leqslant\frac{18-\pi}{4\pi}\,.$$

Легко убедиться, что наибольшее целое n, удовлетворяющее полученному неравенству, равно 1. Поэтому наибольшее решение нашего уравнения равно $\frac{\pi}{2}+2\pi=\frac{5\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{5\pi}{2}$.

Рассмотрим, наконец, уравнение

$$f(x)\sqrt{g(x)}=0.$$

Тут возможны два случая: 1) $g(x)=0$, и при этом $f(x)$ определено; 2) $g(x)>0$, и тогда $f(x)=0$. Таким образом, имеет место эквивалентность:

$$f(x)\sqrt{g(x)}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)=0,\\ f(x)\ \text{определено},\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)>0,\\ f(x)=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Задача. (*МГУ, ВМК, 1998*) Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x\cdot\sqrt{\cos x+3\sin x-1}=0.$$

Решение. Уравнение равносильно совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x+3\sin x-1=0,\\ \sin x\neq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x+3\sin x-1>0,\\ \operatorname{ctg} x=0.\end{cases}\end{array}\right. \tag{4}$$

Рассмотрим уравнение первой системы (4):

$$\cos x+3\sin x=1 \quad\Leftrightarrow\quad \cos\left(x-\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\frac{1}{\sqrt{10}} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad x=\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}+2\pi n \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}x_1=2\arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}+2\pi n,\\ x_2=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Имеем, однако, $\sin x_2=0$ вопреки неравенству первой системы (4). Поэтому решением первой системы служит лишь серия x_1.

Перейдём ко второй системе (4). Её уравнение $\operatorname{ctg} x=0$ имеет решения

$$x_3=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad x_4=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Проверяем выполнение неравенства системы:

$$\cos x_3 + 3\sin x_3 - 1 = 2 > 0;$$
$$\cos x_4 + 3\sin x_4 - 1 = -4 < 0.$$

Годится, как видим, только серия x_3. Итак, все решения исходного уравнения даются сериями x_1 и x_3.

Ответ: $2\arccos\frac{1}{\sqrt{10}} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задачи

1. (*МГУ, централизованный экзамен, 2010*) Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{\operatorname{tg} 3x} = \sqrt{-\operatorname{tg} x}\,,$$

удовлетворяющие неравенству $0 \leqslant x < \pi$.

$\boxed{0,\ \frac{3\pi}{4}}$

2. (*МГУ, мехмат, 1999-03.1*) Решите уравнение

$$\sqrt[8]{\frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}} + \sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{2} - 2x\right)} = 0.$$

$\boxed{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}}$

3. (*МГУ, «Математика вместо ЕГЭ», 2011*) Решите уравнение:

$$\sqrt{6\sin x} = 2\cos x.$$

$\boxed{\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

4. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2010*) Решите уравнение

$$\sqrt{25\sin x + 24} + 2\sqrt{3}\cos x = 0.$$

$\boxed{\pi + \arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

5. (*МФТИ, 1996*) Решите уравнение

$$\sqrt{4 + 3\cos x - \cos 2x} = \sqrt{6}\sin x.$$

$\boxed{\pi + 2\pi n,\ \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

6. (*МГУ, ф-т психологии, 2005*) Решите уравнение

$$\sqrt{2\cos^2 x - \sqrt{3}} + \sqrt{2}\sin x = 0.$$

$\boxed{-\frac{\pi}{12} + 2\pi n,\ -\frac{11\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

7. (*МГУ, ВМК, 2005*) Решите уравнение

$$\sqrt{\operatorname{tg} x + 3} = 5\cos x.$$

$\boxed{\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

8. (*МГУ, ВМК, 2005*) Решите уравнение

$$\sqrt{\operatorname{ctg} x + 1} = -\sqrt{15}\sin x.$$

$\boxed{\pi + \operatorname{arcctg} 2 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

9. (*«Физтех», 2008*) Решите уравнение

$$\sqrt{11 - \sqrt{10}\operatorname{ctg} x} + \sqrt{11}\sin x = 0.$$

$\boxed{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \pi + \operatorname{arctg}\sqrt{10} + 2\pi n,\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{10}} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

10. (*МФТИ, 1993*) Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{2} + \cos^2 x} = \sin x - \cos x.$$

$\boxed{\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ \pi - \operatorname{arctg} 3 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

11. (*МФТИ, 1993*) Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{13}{3} + \cos 2x} + \operatorname{ctg} x = 0.$$

$\boxed{-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

12. (*МФТИ, 1994*) Решите уравнение

$$\sqrt{17 + 7\sin 2x} = 3\sin x + 5\cos x.$$

$\boxed{-\frac{\pi}{8} + 2\pi n,\ \frac{3\pi}{8} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

13. (*«Физтех», 2013*) Решите уравнение

$$\sqrt{3 + 4\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\sqrt{3}} + 3\cos x.$$

$\boxed{\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

14. (*«Физтех», 2013*) Решите уравнение

$$2\sqrt{7}\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{27 + \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

$\boxed{2\pi + 4\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

15. (*МФТИ, 1991*) Решите уравнение

$$\sqrt{5\operatorname{tg} x + 10} = \frac{5}{2}\sin x + \frac{1}{\cos x}\,.$$

$\boxed{-\arccos\frac{1}{\sqrt5} + \pi n,\ \arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

16. (*МФТИ, 1991*) Решите уравнение

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{2}\sin x} = 2\cos x - \sqrt{2}\operatorname{tg} x.$$

$\boxed{-\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

17. (*МГУ, ФНМ, 2004*) Решите уравнение

$$\sqrt{\cos x - 2\cos 2x} + \sqrt{2}\cos 2x = 0.$$

$\boxed{\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \pm\arccos\left(\frac{1-\sqrt5}{4}\right) + 2\pi n,\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

18. (*«Физтех», 2011*) Решите уравнение

$$\sqrt{8\operatorname{tg} x + 22\operatorname{ctg} x} = -\sqrt{15}\,(\sin x + \cos x).$$

$\boxed{\frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ \pi + \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

19. (*МГУ, ВМК, 1993*) На отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{1 + 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x}\,.$$

$\boxed{[0; \frac{\pi}{3}]}$

20. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1996*) Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{x + \sin x} = \sqrt{x - \sin 2x}\,,$$

удовлетворяющие неравенству $-2\pi < x < 2\pi$.

$\boxed{0,\ \pi,\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}}$

21. (*МГУ, геологич. ф-т, 2005*) Найдите наименьший корень уравнения

$$\sqrt{\cos 2x + x - 11} = \sqrt{x - 15 - 5\cos x}\,.$$

$\boxed{5\pi}$

22. (*МГУ, химический ф-т, 1994*) Решите уравнение

$$\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}\,.$$

$\boxed{2\pi n,\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

23. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2002*) Найдите все значения x, принадлежащие интервалу $(-\pi;\pi)$ и являющиеся решениями уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{-2\sin x}} = \sqrt{-2\cos x}\,.$$

$\boxed{-\frac{11\pi}{12},\ -\frac{7\pi}{12}}$

24. (*МГУ, мехмат, 1997*) Решите уравнение

$$\sqrt{12\sin x + 13} = 3\sin x + 2.$$

$\boxed{\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

25. (*МГУ, мехмат, 1995*) Решите уравнение

$$\sqrt{\sin 3x} \cdot \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

$\boxed{\pi n,\ \frac{2\pi}{3} + \pi n,\ \frac{\pi}{12} + 2\pi n,\ \frac{19\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

26. (*МГУ, мехмат, 1997*) Решите уравнение

$$\left(2\cos^2 x - \cos x - 1\right)\sqrt{\operatorname{ctg} x} = 0.$$

$\boxed{\frac{\pi}{2} + \pi n,\ -\frac{2\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

27. (*МГУ, ВМК, 1998*) Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x \cdot \sqrt{\sin x - 2\cos x - 1} = 0.$$

$\boxed{\pi + 2\pi n,\ \pi + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

28. (*МГУ, географич. ф-т, 2000*) Решите уравнение

$$\sqrt{4 - 2\cos^2 x + \sin x + \cos 2x} - \sqrt{\frac{\sin x + 1}{\sin x + 2}} - 1 = 0.$$

$\boxed{(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{5}-3}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

29. (*МГУ, ВМК, 2003*) Решите уравнение

$$\sqrt{\sin 3x \cos x} = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$\boxed{\frac{\pi}{8} + 2\pi n,\ \frac{5\pi}{8} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

30. (*МГУ, ВМК, 1999*) Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{8}} = -\sin x\cos x.$$

$\frac{23\pi}{36}+\pi n,\ \frac{35\pi}{36}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

31. (*МГУ, филологич. ф-т, 2002*) Решите уравнение

$$\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)+\sqrt{3}\,(\cos x-\sin x)} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}\,.$$

$\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

32. (*МГУ, ВМК, 2005*) Решите уравнение

$$12\cos 2x+8|\sin x|\sqrt{3+|\sin x|-3\cos 2x}=11.$$

$\pm\arcsin\frac{\sqrt{3}+1}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

33. (*МГУ, мехмат, 2003-05.2*) Решите уравнение

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\sqrt{5\cos(2x-\pi)+8\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-5}+\sin\frac{x}{2}\cdot\sqrt{2\cos x}=0.$$

$\frac{\pi}{2}+\pi n,\ -\arccos\sqrt{\frac{3}{5}}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

34. (*МГУ, мехмат, 1998*) Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{\sin 2x+\left(\sqrt{3}+1\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+3}=0.$$

$\pm\frac{11\pi}{12}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

35. (*МФТИ, 2006*) Решите уравнение

$$\sin 3x\sqrt{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right).$$

$\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\pi n,\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi(2n+1),\ n\in\mathbb{Z}$

36. (*МФТИ, 2004*) Решить уравнение

$$\cos x\sqrt{1+\sin x-2\cos x}=\cos x-\sin x.$$

$(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

37. (*МГУ, мехмат, 2004-07.4*) Решить уравнение

$$\sqrt{-3\sin 2x} = -2\sin 2x - \sin x + \cos x - 1.$$

$\boxed{2\pi n,\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ -\frac{\pi}{12} + 2\pi n,\ -\frac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$