

## Преобразования тригонометрических уравнений

Данный листок является непосредственным продолжением материалов «Тригонометрические уравнения. 1» и «Тригонометрические уравнения. 2». В нём рассматриваются тригонометрические уравнения, при решении которых используются тождественные преобразования тригонометрических выражений. Эти уравнения предлагались в разные годы на вступительных экзаменах в МГУ, МФТИ и различных олимпиадах.

ЗАДАЧА. (МГУ, филологич. ф-т, 2007) Решите уравнение

$$6 \sin \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right) + 5 \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right) + 1 = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Пользуясь формулой приведения  $\sin \alpha = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ , получаем:

$$\sin \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - 2x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left( \frac{2\pi}{3} - 2x \right) = \cos \left( 2x - \frac{2\pi}{3} \right).$$

Уравнение принимает вид

$$6 \cos \left( 2x - \frac{2\pi}{3} \right) + 5 \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right) + 1 = 0$$

Делаем замену  $t = \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right)$ :

$$6(1 - 2t^2) + 5t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12t^2 - 5t - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = 1, \\ t = -\frac{7}{12}. \end{cases}$$

Дальнейшее очевидно.

ОТВЕТ:  $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + (-1)^{n+1} \arcsin \frac{7}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

ЗАДАЧА. (МФТИ, 2003) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\cos x} (2 \cos^2 x - \sin^2 x \cos 2x - 1) = 1.$$

РЕШЕНИЕ. Преобразуем выражение в скобках:

$$2 \cos^2 x - \sin^2 x \cos 2x - 1 = \cos 2x - \sin^2 x \cos 2x = \cos 2x \cos^2 x.$$

Наше уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 3x \cos 2x \cos x = 1, \\ \cos x \neq 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \cos 3x \cos 2x \cos x = 1, \quad (1)$$

поскольку для любого  $x$ , удовлетворяющего уравнению (1), неравенство системы выполнено. Так как косинус по модулю не превосходит единицы, необходимым условием равенства в уравнении (1) является  $|\cos x| = 1$ , то есть  $x_1 = 2\pi n$  или  $x_2 = \pi + 2\pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Непосредственной проверкой убеждаемся, что  $x_1$  и  $x_2$  служат решениями уравнения (1).

ОТВЕТ:  $\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

ЗАДАЧА. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Решить уравнение

$$\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(17x + \frac{\pi}{4}\right).$$

РЕШЕНИЕ. Пользуемся формулой приведения  $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  и превращаем разность синусов в произведение:

$$0 = \sin\left(17x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(17x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) = 2 \sin 14x \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right),$$

что равносильно совокупности

$$\begin{cases} 14x = \pi n, \\ \frac{\pi}{4} + 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

ОТВЕТ:  $\frac{\pi n}{14}, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$ .

ЗАДАЧА. (МФТИ, 1999) Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x - \cos x}{\cos 3x - \sin 5x} = 1.$$

РЕШЕНИЕ. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 3x - \cos x = \cos 3x - \sin 5x, \\ \sin 3x - \cos x \neq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Преобразуем уравнение (2):

$$\begin{aligned} \sin 3x + \sin 5x = \cos 3x + \cos x &\Leftrightarrow 2 \sin 4x \cos x = 2 \cos 2x \cos x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos x(\sin 4x - \cos 2x) = 0 &\Leftrightarrow \cos x \cos 2x(2 \sin 2x - 1) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (2) равносильно совокупности

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos 2x = 0, \\ \sin 2x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Если  $\cos x = 0$ , то  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). При таких значениях  $x$  имеем  $\sin 3x = \pm 1$ ; неравенство системы (2) выполнено, и данные значения  $x$  являются решениями исходного уравнения.

Если  $\cos 2x = 0$ , то  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Чтобы проверить неравенство (2), разобьём данное множество значений  $x$  на четыре серии, в каждой из которых значения отличаются на  $2\pi n$ .

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n &\Rightarrow \sin 3x_1 - \cos x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0; \\ x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n &\Rightarrow \sin 3x_1 - \cos x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0; \\ x_3 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n &\Rightarrow \sin 3x_1 - \cos x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0; \\ x_4 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n &\Rightarrow \sin 3x_1 - \cos x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0. \end{aligned}$$

Как видим, годятся лишь  $x_2$  и  $x_3$ . Их можно объединить в одну серию:  $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ .

Наконец, если  $\sin 2x = \frac{1}{2}$ , то  $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Тем же способом, что и выше, убеждаемся, что все эти значения  $x$  удовлетворяют неравенству (2).

ОТВЕТ:  $\frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $-\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

ЗАДАЧА. («Физтех», 2010) Решить уравнение

$$\frac{\sin 7x \cos x - \sin 5x \cos 3x}{\cos 2x - \sin 2x} = 0.$$

РЕШЕНИЕ. При ограничении

$$\cos 2x - \sin 2x \neq 0 \tag{3}$$

данное уравнение равносильно уравнению

$$\begin{aligned} 2 \sin 7x \cos x - 2 \sin 5x \cos 3x = 0 &\Leftrightarrow \sin 8x + \sin 6x - (\sin 8x + \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin 6x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x \cos 4x = 0. \end{aligned}$$

Если  $\sin 2x = 0$ , то  $x = \frac{\pi n}{2}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). При этих значениях  $x$  имеем  $\cos 2x = \pm 1$ , так что неравенство (3) выполнено.

Пусть теперь  $\cos 4x = 0$ , то есть

$$0 = \cos^2 2x - \sin^2 2x = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x).$$

При ограничении (3) это равносильно

$$\cos 2x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

откуда  $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

ОТВЕТ:  $\frac{\pi n}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

ЗАДАЧА. (МФТИ, 2002) Решить уравнение

$$\cos^2 x + \cos^2 2x = 1 + \operatorname{ctg} 3x.$$

РЕШЕНИЕ. Пользуемся формулами понижения степени:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} = 1 + \operatorname{ctg} 3x &\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x = 2 \operatorname{ctg} 3x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \cos 3x \cos x = 2 \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \Leftrightarrow \cos 3x \left( \cos x - \frac{1}{\sin 3x} \right) = 0. \end{aligned}$$

При ограничении

$$\sin 3x \neq 0 \tag{4}$$

уравнение равносильно совокупности

$$\left[ \begin{array}{l} \cos 3x = 0, \\ \cos x \sin 3x = 1. \end{array} \right. \tag{5}$$

Если  $\cos 3x = 0$ , то  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). При этом  $\sin 3x = \pm 1$ , так что неравенство (4) выполнено.

Пусть теперь  $\cos x \sin 3x = 1$ . Так как косинус и синус по модулю не превосходят единицы, данное равенство может быть выполнено только при  $|\cos x| = 1$ , то есть при  $x = \pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Но при таких  $x$  имеем  $\sin 3x = 0$ . Следовательно, второе уравнение совокупности (5) не имеет решений.

ОТВЕТ:  $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$

ЗАДАЧА. («Физтех», 2009) Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x + 2 \cos x} = \operatorname{ctg}^2 x.$$

РЕШЕНИЕ. Преобразуем левую часть, используя формулы тройного угла:

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x + 2 \cos x} = \frac{3 \sin x - 4 \sin^3 x}{(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 2 \cos x} = \frac{\sin x (3 - 4(1 - \cos^2 x))}{\cos x (4 \cos^2 x - 1)} = \frac{\sin x (4 \cos^2 x - 1)}{\cos x (4 \cos^2 x - 1)}.$$

Поэтому при ограничении

$$4 \cos^2 x - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2x \neq -\frac{1}{2} \tag{6}$$

наше уравнение равносильно

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}^3 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} x = 1,$$

откуда  $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Легко видеть, что эти значения  $x$  удовлетворяют неравенству (6).

ОТВЕТ:  $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

ЗАДАЧА. (МФТИ, 2007) Решить уравнение

$$11 + \cos 8x = -12 \frac{\cos 4x}{\sin 3x} - 10 \operatorname{ctg}^2 3x.$$

РЕШЕНИЕ. Преобразуем левую часть:

$$11 + \cos 8x = 11 + 2 \cos^2 4x - 1 = 10 + 2 \cos^2 4x.$$

При ограничении

$$\sin 3x \neq 0 \tag{7}$$

наше уравнение равносильно уравнению

$$\begin{aligned} (5 + \cos^2 4x) \sin^2 3x + 6 \cos 4x \sin 3x + 5 \cos^2 3x = 0 & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos^2 4x \sin^2 3x + 6 \cos 4x \sin 3x + 5 = 0. \end{aligned}$$

Замена  $t = \cos 4x \sin 3x$  приводит к квадратному уравнению  $t^2 + 6t + 5 = 0$  с корнями  $t = -1$  и  $t = -5$ . Поскольку синус и косинус не превосходят по модулю единицу, уравнение  $\cos 4x \sin 3x = -5$  не имеет решений. Остаётся рассмотреть уравнение

$$\cos 4x \sin 3x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x - \sin 7x = 2,$$

которое (опять-таки по причине того, что модуль синуса не более 1) равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 7x = -1. \end{cases}$$

Решения первого уравнения системы суть  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ); легко видеть, что они удовлетворяют и второму уравнению, а также ограничению (7). Следовательно, эти значения  $x$  служат решениями исходного уравнения.

ОТВЕТ:  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

## Задачи

1. (МГУ, ДВИ, 2012.4) Решите уравнение

$$\sin 3x = \sqrt{2} \cos x - \sin x.$$

$\mathbb{Z} \ni \eta \left( \frac{\xi}{\eta^2} + \frac{\xi}{\eta} \right) (1 - \dots) ; \mathbb{Z} \ni u \left( u\eta + \frac{\xi}{\eta} \right)$

2. (МГУ, ДВИ, 2013.4) Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin 5x} - \frac{\cos x}{\cos 5x}.$$

$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z} \ni u \left( \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z} \ni \eta \left( \frac{9}{\eta^2} + \frac{8}{\eta} \right) = x \right)$

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin \pi x = -\sqrt{3} \cos \frac{\pi x}{2}.$$

$\frac{\xi}{2} -$

4. (ОММО, 2011) Решите уравнение  $2|x + 2| \cos x = x + 2$ .

$\mathbb{Z} \ni u \left( 0 \leq u \left( u\eta^2 + \frac{\xi}{\eta} \right) \neq 0 \geq u \left( u\eta^2 + \frac{\xi}{\eta^2} \right) - 1 \geq u \left( u\eta^2 + \frac{\xi}{\eta^2} \right) ; \mathbb{Z} \right)$

5. (МГУ, мехмат, 2004-03.1) Найдите сумму тангенсов всех таких  $x \in (-\pi; \pi)$ , что

$$\sin 2x + 5 \cos 2x = 3.$$

$\frac{\xi}{1}$

6. (МГУ, филологич. ф-т, 2007) Решить уравнение

$$5 \cos \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) = 4 \sin \left( \frac{5\pi}{6} - x \right) - 1.$$

$\mathbb{Z} \ni u \left( u\eta + \frac{\xi}{\eta} \right) \text{ и } \text{связь } u(1 - \dots) + \frac{9}{\eta} - \left( u\eta^2 + \frac{\xi}{\eta^2} \right) -$

7. (МФТИ, 2006) Решить уравнение

$$\left( \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x \right)^2 = 7 + 3 \cos \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right).$$

$\mathbb{Z} \ni u \left( u\eta + \frac{\xi}{\eta} \right)$

8. (МГУ, централизованный экзамен, 2009) Решить уравнение

$$2 \cos^2 x - 5 \sin 2x + \frac{6t}{\pi} = 0,$$

где  $t = \arccos\left(\cos \frac{23\pi}{3}\right) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{8} \text{ и } \arctan\left(u\pi + \frac{\pi}{x}\right)$$

9. (МГУ, «Математика вместо ЕГЭ», 2010) Решите уравнение

$$2 \sin^4 x + 7 \cos^3 x = 2.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2} \text{ и } u\pi + \frac{\pi}{x}$$

10. (МГУ, ИСАА, 2005) Решите уравнение

$$\cos 4x = 4 \cos x \cos 2x - 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2} \text{ и } \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{x}\right)$$

11. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Решите уравнение

$$\frac{\cos 4x - 6 \cos^2 2x + 8 \cos^2 x}{\sqrt{6x - x^2 - 5}} = 0.$$

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$$

12. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Решите уравнение

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16} \cos^4 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{2x} + \frac{\pi}{x}$$

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) Сколько различных решений на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  имеет уравнение

$$6\sqrt{2} \cos x \operatorname{ctg} x - 2\sqrt{2} \operatorname{ctg} x - 3 \cos x + 1 = 0?$$

Найдите эти решения.

$$\frac{\pi}{1} \text{ для решения; } \pm \arccos \frac{3}{1}$$

14. (МФТИ, 2003) Решить уравнение

$$\frac{\cos 5x}{\cos x} (1 - 2 \sin^2 x - \sin^2 x \cos 2x) = 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi$$

15. («Физтех», 2014) Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{3} \cos x}{\sin x + \cos x} = \operatorname{tg} 2x + \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot u\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}$$

16. («Физтех», 2014) Решите уравнение

$$\frac{\cos x \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{9 \cos^2 x + 7 \sin^2 x - 8} - \frac{\cos x \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{8 - 7 \cos^2 x - 9 \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot u\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}$$

17. («Покори Воробьёвы горы!», 2017) Решите уравнение

$$\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = \frac{12}{\cos 2x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \frac{x}{u\sqrt{x}} + \frac{x1}{\sqrt{x}} \mp$$

18. (МФТИ, 1993) Найдите все решения уравнения

$$\frac{\sin 6x}{\sin x - \cos x} = \frac{\cos 6x}{\cos x + \sin x},$$

принадлежащие интервалу  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ .

$$\frac{0x}{x6} - \frac{0x}{x} -$$

19. (МФТИ, 1994) Решить уравнение

$$\frac{2 \cos x + \sin^2 x}{\operatorname{ctg} x - \sin 2x} = \operatorname{tg} 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot u\sqrt{x} + \frac{x}{1} \operatorname{coscra} \mp \sqrt{x}$$

20. (МФТИ, 2002) Решить уравнение

$$\frac{3 + 4 \cos 2x - 8 \cos^4 x}{\sin 2x - \cos 2x} = \frac{1}{\sin 2x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \frac{x}{u\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}}$$

21. (МГУ, экз. для иностр. гр-н, 2010) Решите уравнение

$$\frac{\cos x + \sin 2x}{\cos 3x} = 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot u\sqrt{x}$$

22. (МГУ, физический ф-т, 2007) Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x - \sin 3x}{2 \sin x} = 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}$$

23. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Решить уравнение

$$\sin\left(14x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(20x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{2u} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4u}$$

24. (МГУ, химический ф-т, 2006) Решить уравнение

$$\cos x + \sin x + \cos 3x + \sin 3x = -\sqrt{6} \cos x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

25. (МФТИ, 1999) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x + \sin 5x}{\cos x + \sin 3x} = -1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{2u} + \frac{\pi}{2} \mp u(1 - u), u\pi + \frac{\pi}{2}, u\pi + \frac{\pi}{2}$$

26. (МФТИ, 2006) Решить уравнение

$$5 \sin 3x + 16 \cos x + 5 \sin x = 12 \cos^3 x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2}, u\pi + \frac{\pi}{2}, u\pi + \frac{\pi}{2}$$

27. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Решить уравнение

$$\frac{\cos 5x + \cos x}{\cos 4x + \cos 2x} = \frac{1 + \cos 4x}{\cos x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{2u} + \frac{\pi}{2}$$

28. («Физтех», 2012) Решите уравнение

$$\cos^2 2x + \cos^2 4x = 1 + \operatorname{ctg} 6x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{2u} + \frac{\pi}{2}$$

29. (МФТИ, 2002) Решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1 - \frac{\cos 3x}{\cos 2x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{2u} + \frac{\pi}{2}, u\pi$$



30. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Решить уравнение

$$6 \cos 9x \cos 2x = 1 + 3 \cos 11x + 2 \cos^3 7x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{1}{u\sqrt{2}} + \frac{1}{1-\sqrt{2}} \cos \frac{1}{1} \mp \frac{1}{u\sqrt{2}}$$

31. («Физтех», 2010) Решить уравнение

$$\frac{\sin 5x \cos 3x - \sin 7x \cos x}{\cos 2x + \sin 2x} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{1}{u\sqrt{2}} + \frac{1}{1-\sqrt{2}} \cos \frac{1}{1} \mp \frac{1}{u\sqrt{2}}$$

32. («Физтех», 2009) Найти решения уравнения

$$\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} + 8 \sin x \sin 3x = 0,$$

удовлетворяющие неравенству  $\sin x \geq 0$ .

$$\left(\frac{1}{2}\right) \cos \frac{1}{1} = 0, \mathbb{Z} \ni u, u\sqrt{2} + 1 - u, u\sqrt{2} + 1 \mp \frac{1}{u}, u\sqrt{2} + 1, u\sqrt{2}$$

33. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Найдите сумму корней уравнения

$$\cos^2 x + \cos^2 3x - 2 \cos x \cos 2x \cos 3x = \sin^2 4x,$$

принадлежащих отрезку  $[\pi; 2\pi]$ . В ответе укажите целое число, наиболее близкое к найденной сумме.

$$\boxed{33}$$

34. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Найдите все общие точки графиков

$$y = 8 \cos \pi x \cdot \cos 2\pi x \cdot \cos^2 4\pi x \quad \text{и} \quad y = \cos 11\pi x$$

с абсциссами, принадлежащими отрезку  $[0; 1]$ . В ответе укажите сумму абсцисс найденных точек.

$$\boxed{4,5}$$

35. (МФТИ, 1997) Решить уравнение

$$\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 8 \sin x \sin 3x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{1}{u\sqrt{2}} + \frac{1}{1-\sqrt{2}} \cos \frac{1}{1} \mp \frac{1}{u\sqrt{2}}$$

36. (МФТИ, 2000) Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 5x}{\sin^2 x} = 24 \cos 2x + \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{1}{u\sqrt{2}} + \frac{1}{1-\sqrt{2}} \cos \frac{1}{1} \mp \frac{1}{u\sqrt{2}}$$

37. (МГУ, ф-т психологии, 2006) Решить уравнение

$$9 \cos 2x + 9 \cos 6x = 36 \cos x \cos 3x + 140\sqrt{3} \sin x \sin 2x - 162.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

38. (ОММО, 2012) Найдите сумму всех различных корней уравнения

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0,$$

принадлежащих интервалу  $(0; \pi)$ .

$$\frac{9}{\pi}$$

39. (МГУ, ИСАА, 2006) Решите уравнение:

$$3 + 6 \cos 2x + 3 \cos 4x + 2 \cos 6x = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cos \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

40. («Физтех», 2009) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\sin 3x - 2 \sin x} = \operatorname{tg}^2 x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

41. (МФТИ, 2008) Решить уравнение

$$\frac{4 \cos 4x \cos^2 2x - 3 \cos 2x - \cos 6x}{2 \sin^2 x - 1} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

42. (МГУ, геологич. ф-т, 2006) Найдите корни уравнения

$$\frac{\sqrt{3}(\sin 2x + \cos 3x)}{\cos 2x - \sin 3x} = 1,$$

расположенные в интервале  $(1; 2)$ .

$$\frac{0\pi}{\pi}$$

43. (МГУ, геологич. ф-т, 2008) Найти корни уравнения

$$\frac{\sqrt{3} \sin 2x - 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \cos 2x}{\cos \left(x - \frac{7\pi}{3}\right)} = 0,$$

расположенные на промежутке  $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ .

$$\frac{7}{\pi}$$

44. (МГУ, географич. ф-т, 2006) Решить уравнение

$$2 \sin x - \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x - 1 = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}, u\pi\tau + \pi$$

45. (МФТИ, 2007) Решить уравнение

$$9 + \cos 12x = 10 \frac{\cos 6x}{\sin 5x} - 8 \operatorname{ctg}^2 5x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi\tau + \frac{\pi}{2} -$$

46. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Определите, сколько корней на промежутке  $[-\pi; \pi]$  имеет уравнение

$$\frac{2 \cos 4x + 1}{2 \cos x - \sqrt{3}} = \frac{2 \sin 4x - \sqrt{3}}{2 \sin x - 1},$$

и найдите эти корни.

$$\text{Четыре корня: } -5\pi/6, -\pi/3, \pi/2, 2\pi/3$$

47. (МФТИ, 1993) Найдите все решения уравнения

$$\frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{\sin 6x} = \frac{\sqrt{3} \cos x + \sin x}{\cos 6x},$$

принадлежащие интервалу  $(0; \frac{\pi}{2})$ .

$$\frac{0\pi}{11}$$

48. (МГУ, химический ф-т, 2005) Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} 4x + \cos 5x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{2} + \frac{0\pi}{\pi}$$

49. («Физтех», 2012) Найдите наименьший корень уравнения

$$\operatorname{ctg} 6x - \operatorname{tg} 5x = \frac{1}{\cos 5x},$$

принадлежащий отрезку  $[\frac{8\pi}{17}; \frac{40\pi}{17}]$ .

$$\frac{1\pi}{17}$$

50. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Решите уравнение

$$6 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x + 5 \operatorname{ctg} 3x = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2} \operatorname{составлять} \frac{\pi}{2} \mp u\pi + (\frac{\pi}{2} -) \operatorname{составлять} \frac{\pi}{2} \mp$$

51. («Физтех», 2010) Решить уравнение

$$\frac{\sin 2x \cos 10x - \sin 4x \cos 8x}{\cos 2x} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \frac{2}{uv} + \frac{21}{x} \mp \frac{2}{uv}$$

52. (МГУ, ф-т биоинженерии и биоинформатики, 2010)

а) Решите уравнение

$$\frac{9(\sin x + \cos x)^2}{\cos 2x} + \frac{32(1 + 7 \operatorname{ctg} x \operatorname{tg} 4x)}{\operatorname{tg} x + 7 \operatorname{tg} 4x} + 7 = 0.$$

б) Найдите сумму всех корней этого уравнения, принадлежащих отрезку  $[0; 120\pi]$ , и выясните, что больше: эта сумма или число 23040.

$$0 \neq \mathbb{Z} > \pi \neq 11 + 1 \neq \operatorname{arctg} 4 + 1 \neq 7140\pi (5) \mathbb{Z} \ni u \cdot uv + 1 \neq \operatorname{arctg} (a)$$

53. (МГУ, ВМК, 2007) Найдите все решения уравнения

$$2 \sin \left( x + \frac{7\pi}{25} \right) \cdot \sin \left( 3x + \frac{18\pi}{25} \right) = \cos 4x + 2^{\cos \frac{2\pi}{3}},$$

принадлежащие отрезку  $[-\frac{\pi}{10}; \frac{4\pi}{5}]$ .

$$\frac{002}{19\pi} ; \frac{002}{131\pi} -$$

54. («Физтех», 2009) Найти решения уравнения

$$\frac{\sin x}{\cos 3x} + \frac{\cos 5x}{\sin x} + 4(\sin 4x + \sin 2x) = 8 \cos x \sin 3x,$$

удовлетворяющие неравенству  $\cos x > 0$ .

$$1'9'1'0 = \pi' \mathbb{Z} \ni u' uv \neq + \frac{1}{\pi} + \frac{8}{x}$$

55. («Физтех», 2009) Решить уравнение

$$\frac{\sin 4x}{4 \cos x + \cos 3x} = -4 \sin^3 x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot uv$$

56. («Физтех», 2009) Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 3x + \frac{1}{\cos 3x} = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin 4x}{\cos x \cos 3x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot uv + \frac{1}{1-\mathbb{E}\mathbb{A}} \operatorname{arcsin} \frac{1}{1+u(1-)} \cdot uv$$

57. (МФТИ, 2008) Решить уравнение

$$\frac{64 \sin^3 x \cos^5 x + \sin 6x - 3 \sin 2x}{\sin x \cos x} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{7}{ux} + \frac{v}{x}$$

58. (МФТИ, 2006) Решить уравнение

$$8 \cos^2 x \sin x + \cos x = \cos 3x + 6 \sin x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, ux + \frac{5}{x} \sin x - ux + \frac{v}{x} ux$$

59. (МФТИ, 2006) Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} 4x \operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 4x} = \frac{\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, v, (vL \neq u) \frac{L}{ux}$$

60. (МФТИ, 1997) Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin 3x} = 2 \cos 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{7}{ux} + \frac{v}{x}$$

61. (МФТИ, 2000) Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 7x}{\sin^2 x} = 16 \cos 4x(1 + 2 \cos 4x) + \frac{\cos^2 7x}{\cos^2 x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{7}{ux} + \frac{9}{x} \mp \frac{v}{ux} + \frac{8}{x}$$

62. (МФТИ, 2000) Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos 2x \cos 5x} + \frac{\sin 3x}{\cos 5x \cos 8x} = \sin 8x - \operatorname{tg} 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, n \neq 2 + 4k, n \neq 4 + 8k, k \in \mathbb{Z}, \frac{8}{ux}$$

63. (МФТИ, 2001) Решить уравнение

$$\frac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos x} + \cos^2 x \sin 3x = 6 \cos 2x \sin^2 x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, ux + \frac{9}{x} u(1-) \frac{7}{ux} + \frac{v}{x} ux$$

64. (МФТИ, 2002) Решить уравнение

$$\frac{3 + \cos 4x - 8 \sin^4 x}{4(\sin x + \cos x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, ux$$

65. (МФТИ, 2005) Решить уравнение

$$\frac{\sin \frac{3x}{2} \sin \frac{5x}{2}}{\cos x \cos 4x} - \frac{\sin \frac{x}{2} \sin \frac{7x}{2}}{\cos 4x \cos 3x} = \frac{2 \sin x \sin 2x}{\cos x \cos 3x} - \frac{1}{5 \cos x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left( u\pi + \frac{4}{9} \operatorname{arccos} \frac{5}{7} \right)$$

66. (МФТИ, 2005) Решить уравнение

$$\frac{\sin^5 x - \cos^5 x}{\sqrt{2} \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right)} + \frac{\sin^5 x + \cos^5 x}{\sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{7}{8} - \frac{3}{2} \cos 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left( u\pi + \frac{\pi}{2} \right)$$

67. (МФТИ, 2007) Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi \sin^2 x + \pi}{4 \sin^6 x + 1} \right) - \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4 \sin^6 x + 1} \right) = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left( \frac{\pi}{u\pi} + \frac{\pi}{2} \right)$$

68. (МГУ, мехмат, 2000-03.3) Найти все корни уравнения

$$\cos x \sin \frac{x}{4} + \frac{9}{10} \sin x + 2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \cos \frac{x}{4} - \frac{9}{20} = 0,$$

принадлежащие отрезку  $[-\frac{9}{2}\pi; -\frac{3}{2}\pi]$ .

$$\left( \frac{0\pi}{6} \right) \operatorname{arccos} \frac{1}{2} - \left( \frac{9}{2\pi} \right) - \left( \frac{9}{2\pi} \right) - \left( \frac{9}{2\pi} \right)$$

69. (МГУ, мехмат, 2009) Решить уравнение

$$\cos 4x + \sin \left( 2x - \frac{a\pi}{64} \right) = \sin 3x,$$

где  $a$  — наименьшее из таких двузначных натуральных чисел, при приписывании которых справа к числу 20092009 полученное десятизначное число делится на 36.

$$\mathbb{Z} \ni u \left( u\pi + \frac{9}{2} u(\pi) \right) \left( \frac{\pi}{u\pi} \right)$$

70. (МГУ, мехмат, 2008) Игорь решил тригонометрическое уравнение и получил ответ

$$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad \frac{4\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ в конце учебника выглядел иначе:

$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Правильный ли ответ получил Игорь? Привести пример тригонометрического уравнения с ответом как в учебнике.

$$0 = \left( \frac{x}{\sqrt{x}} + x \cos \right) (1 - x \sin) \quad \text{Дл. Прмер}$$

71. (Олимпиада СПбГУ, 2011) Решить уравнение

$$4 \cos x - \cos 3x + 3 = 3 \sin 3x.$$

$$\mathbb{Z} \ni n, m, k \in \mathbb{Z} \quad \frac{x}{2} - \pi n, \quad \pi m, \quad \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$$

72. («Ломоносов», 2006) Решите уравнение

$$\sin(x^2 + x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0.$$

$$\dots, \pi, 2, \dots \quad \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad \frac{\pi}{2} + \pi k$$

73. («Ломоносов», 2015) Найдите все значения  $x$ , при которых числа  $4 \operatorname{ctg}(\pi x)$ ,  $\operatorname{tg} \frac{2\pi x}{3}$  и  $6 \operatorname{tg} \frac{\pi x}{3}$ , взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Из этих значений  $x$  выберите принадлежащие отрезку  $[3; 9]$  и запишите в ответ их сумму.

48

74. («Ломоносов», 2016) Решите уравнение

$$5 \sin\left(2x + \arccos \frac{4}{5}\right) + 8\sqrt{5} \sin\left(x - \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = 11.$$

В ответе укажите сумму всех решений, принадлежащих промежутку  $\left(\frac{7\pi}{3}; \frac{7\pi}{2}\right)$ , при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

9,42

75. («Покори Воробьёвы горы!», 2008) Решите уравнение

$$\cos 6x - 3 \cos 5x + \cos 4x - 4 \cos x + 5 = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni n, m, k$$

76. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Решите уравнение

$$\sin\left(x + 3^0 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(x + 3^1 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \dots + \sin\left(x + 3^5 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) = 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \text{ члн } \frac{\pi}{x} -$$

77. («Покори Воробьёвы горы!», 2011) Найдите наименьшее натуральное решение уравнения

$$\sin(2011x)^\circ = \sin x^\circ.$$

$$\boxed{12}$$

78. («Покори Воробьёвы горы!», 2011) Решите уравнение

$$\sin(\sin x) = \sin(\cos x + 1).$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \text{ члн } \frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{2\pi n}, n \in \mathbb{Z}$$

79. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Определите, сколько корней уравнения

$$4 \sin 2x + 3 \cos 2x - 2 \sin x - 4 \cos x + 1 = 0$$

расположено на отрезке  $[10^{2014!}\pi; 10^{2014!+2015}\pi]$ . В ответ запишите сумму всех цифр найденного числа.

$$\boxed{18135}$$

80. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Решите уравнение

$$(1 - \cos x)(2 + \sin x + 4 \cos x) + 5(1 + \cos x)(2 - \sin x + 2 \cos x) = 0.$$

В ответ запишите сумму всех корней уравнения на промежутке  $[1018\pi; 1019\pi]$ , округлённую до сотых.

$$\boxed{6342,03}$$

81. (Всеросс., 2018, ШЭ, 11.5) Рассмотрим уравнение  $\sin^3 x + \cos^3 x = -1$ . Сколько у него решений на промежутке  $[0, 6\pi]$ ?