

Тригонометрические неравенства

Предполагается, что читатель умеет решать простейшие тригонометрические неравенства. Мы же переходим к более сложным задачам.

ЗАДАЧА. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Найдите решения неравенства

$$\sqrt{\cos x + \frac{1}{2}} > 2 \cos x$$

на отрезке $[-2; \frac{16}{15}]$.

РЕШЕНИЕ. Сделаем замену $t = \cos x$:

$$\sqrt{t + \frac{1}{2}} > 2t \tag{1}$$

и решим полученное неравенство относительно t .

При $t < 0$ неравенство (1) равносильно неравенству $t + \frac{1}{2} \geq 0$. Отсюда имеем первую часть решений: $-\frac{1}{2} \leq t < 0$.

При $t \geq 0$ неравенство (1) равносильно неравенству

$$t + \frac{1}{2} > 4t^2 \Leftrightarrow 4t^2 - t - \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < t < \frac{1}{2},$$

откуда получаем вторую часть решений: $0 \leq t < \frac{1}{2}$.

Объединяя обе части, находим множество решений неравенства (1): $-\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2}$. Обратная замена приводит к неравенству

$$-\frac{1}{2} \leq \cos x < \frac{1}{2},$$

множество M решений которого является объединением всевозможных промежутков

$$A_n = \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \right) \quad \text{и} \quad B_n = \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \right]$$

при всех целых n :

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n \cup B_n.$$

Нам остаётся найти пересечение множества M с отрезком $I = [-2; \frac{16}{15}]$.

Легко понять, что при $n \neq 0$ отрезок I не пересекает ни один из промежутков A_n, B_n (убедитесь в этом самостоятельно). Далее, поскольку $-\frac{2\pi}{3} < -2 < -\frac{\pi}{3}$, то $I \cap A_0 = [-2; -\frac{\pi}{3})$. Наконец, так как

$$\frac{16}{15} - \frac{\pi}{3} = \frac{16 - 5\pi}{15} > \frac{16 - 5 \cdot 3,2}{15} = 0,$$

то $I \cap B_0 = (\frac{\pi}{3}; \frac{16}{15}]$.

ОТВЕТ: $[-2; -\frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}; \frac{16}{15}]$.

ЗАДАЧА. (МГУ, ВМК, 2006) Найдите все решения неравенства

$$\operatorname{ctg} x > \frac{5 \cos 2x + 7}{5 \sin 2x - 4},$$

удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{12} \leq x < \frac{\pi}{2}$.

РЕШЕНИЕ. Заметим, что при $x \neq \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) имеют место тождества:

$$\cos 2x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{\operatorname{ctg}^2 x + 1}, \quad \sin 2x = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{2 \operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg}^2 x + 1}.$$

Делая в исходном неравенстве замену $t = \operatorname{ctg} x$, приходим к рациональному неравенству относительно t :

$$t > \frac{5 \cdot \frac{t^2-1}{t^2+1} + 7}{5 \cdot \frac{2t}{t^2+1} - 4},$$

что после несложных преобразований даёт равносильное неравенство

$$\frac{(2t+1)(t^2+1)}{(t-2)(2t-1)} > 0,$$

легко решаемое методом интервалов:

$$-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}, \quad t > 2.$$

Таким образом, исходное неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < \operatorname{ctg} x < \frac{1}{2}, \\ \operatorname{ctg} x > 2. \end{cases}$$

Множество M решений данной совокупности:

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n \cup B_n,$$

где

$$A_n = (\pi n; \operatorname{arccctg} 2 + \pi n), \quad B_n = \left(\operatorname{arccctg} \frac{1}{2} + \pi n; \operatorname{arccctg} \left(-\frac{1}{2} \right) + \pi n \right).$$

Нам требуется найти пересечение множества M с промежутком $I = \left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{2} \right)$. Очевидно, что при $n \neq 0$ множества A_n и B_n не пересекаются с I , а

$$B_0 \cap I = \left(\operatorname{arccctg} \frac{1}{2}; \frac{\pi}{2} \right). \quad (2)$$

Кроме того,

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} = \frac{\cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12}} = \frac{2 \cos^2 \frac{\pi}{12}}{2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2 + \sqrt{3} > 2,$$

поэтому $\frac{\pi}{12} < \operatorname{arccctg} 2$ и

$$A_0 \cap I = \left[\frac{\pi}{12}; \operatorname{arccctg} 2 \right). \quad (3)$$

Остаётся объединить промежутки (2) и (3).

ОТВЕТ: $\left[\frac{\pi}{12}; \operatorname{arccctg} 2 \right) \cup \left(\operatorname{arccctg} \frac{1}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.

Задачи

1. (МГУ, ДВИ, 2015.3) Решите неравенство

$$\cos x + \sqrt{2} \cos 2x \geq 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] \cap \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] \ni x$$

2. («Покори Воробьёвы горы!», 2019) Решите неравенство

$$\sqrt{2} \cos 2x \geq \sin x - \cos x.$$

$$\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] \cap \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right]$$

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2017) Решите неравенство

$$3 \sin \left(\frac{2x}{3} \right) \geq 5 - 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3} \right).$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2017) Решите неравенство

$$\left(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \right)^7 > 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Найдите решения неравенства

$$\sqrt{\sin x + \frac{1}{2}} > 2 \sin x$$

на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{8}{3} \right]$.

$$\left[\frac{\pi}{8}; \frac{9}{2} \right] \cap \left(\frac{9}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$$

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Найдите решения неравенства

$$\sqrt{\cos x + \frac{1}{2}} > 2 \cos x$$

на отрезке $\left[-2; \frac{16}{15} \right]$.

$$\left[\frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{2} \right] \cap \left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$$

7. («Ломоносов», 2016) Решите неравенство

$$\sqrt{7 + 8 \sin^2 \frac{\pi x}{18}} > 4 \cos^2 \frac{\pi x}{18}.$$

В ответ впишите сумму всех целых решений, принадлежащих отрезку $[-18; 35]$.

297

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Решите неравенство

$$\sqrt{2 \sin x \cos x} > \cos^3 x - \sin^3 x + \sin x \cos x (\sin x - \cos x).$$

$$\mathbb{Z} \ni u \in (u\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}; u\sqrt{2} + \sqrt{2}) \cap [u\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}; u\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}]$$

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Найдите сумму всех принадлежащих отрезку $[-75; 5]$ целых решений неравенства

$$\frac{\sin \frac{\pi x}{2} - \cos \frac{\pi x}{2} + 1}{\sin \frac{\pi x}{2} + \cos \frac{\pi x}{2} - 1} \geq \sin \left(\arcsin \frac{x}{10} \right) - \frac{x}{10}.$$

71-

10. («Ломоносов», 2014) Найдите количество всех целочисленных решений неравенства

$$\sqrt{3 \cos \frac{\pi x}{2} - \cos \frac{\pi x}{4} + 1} - \sqrt{6} \cos \frac{\pi x}{4} \geq 0,$$

принадлежащих отрезку $[1991; 2013]$.

6

11. (МГУ, мехмат, 2009) Найдите все значения аргумента x , при каждом из которых соответствующее значение функции

$$f(x) = \frac{2 \cos \frac{\pi(15+x)}{6} + 1}{\sqrt{14 + 5x - x^2}}$$

положительно.

(7;9) \cap (1;7-)

12. (МГУ, физический ф-т, 2008) Найти множество решений неравенства

$$\frac{1}{2} \left(\frac{9x}{\pi} \right)^2 > \cos 3x.$$

Ответ обосновать, используя свойства функций $y = \frac{1}{2} \left(\frac{9x}{\pi} \right)^2$ и $y = \cos 3x$.

(\infty + ; \frac{6}{\pi}) \cap (\frac{6}{\pi} - ; \infty -)

13. (МГУ, ВМК, 2006) Найдите все решения неравенства

$$\operatorname{tg} x > \frac{9 - 3 \cos 2x}{3 \sin 2x - 2},$$

удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{8} \leq x < \frac{\pi}{2}$.

$$\left(\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{2} \setminus \frac{\pi}{4} \right)$$

14. (МФТИ, 1998) Решить неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{7 - \cos 4x}{2}} > -2 \sin x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u; \left(u\pi\sqrt{\frac{2}{5}}; u\pi\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{\pi}{2} \right)$$

15. (МФТИ, 1998) Решить неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{5 + 3 \cos 4x}{8}} > -\cos x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u; \left(u\pi\sqrt{\frac{2}{3}}; u\pi\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{\pi}{3} \right)$$

16. (МГУ, ВМК, 2008) Решить неравенство

$$\sqrt{1 - \sin 2x} + |\sin x| \leq \cos x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u; \left[u\pi\sqrt{\frac{2}{3}}; u\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \right]$$

17. («Ломоносов», 2019, 10–11) Найдите все решения неравенства:

$$\sin^{2018} x + \cos^{-2019} x \geq \cos^{2018} x + \sin^{-2019} x,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

$$\left[\frac{\pi}{2\sqrt{2}}; \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) \cap \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}}; \pi \right) \cap \left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right] \cap \left(0; \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)$$

18. («Ломоносов», 2013) Фигура на координатной плоскости состоит из точек (x, y) , удовлетворяющих при любом $t \in \mathbb{R}$ двум неравенствам:

$$x^2 + y^2 < \pi^2 + t^2, \quad \cos y < 2 + \cos 2x + (4 \sin t - 1) \cos x - \cos 2t.$$

Найдите площадь этой фигуры.

$$2\pi^2 - \pi^2$$

19. («Покори Воробьёвы горы!», 2012) Найдите суммарную длину отрезков, составляющих решение неравенства

$$|2 \sin x + 3 \cos x| + |\sin x - 3 \cos x| \leq 3 \sin x$$

на отрезке $[0; 4\pi]$.

$$2 \arctan \frac{1}{9}$$

20. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) Найдите минимальное натуральное число n , при котором система неравенств

$$\cos x \geq \cos \left(x + \frac{1}{8}\right) \geq \cos \left(x + \frac{2}{8}\right) \geq \dots \geq \cos \left(x + \frac{n}{8}\right)$$

не имеет решений.

27

21. (Всеросс., 2016, МЭ, 11) Решите неравенство

$$\sin \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{x^2 + 1}{x} \cos \frac{x}{x^2 + 1} > 0.$$

(∞+i0)

22. (ММО, 2014, 11) Найдите все такие a и b , что $|a| + |b| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$ и при всех x выполнено неравенство

$$|a \sin x + b \sin 2x| \leq 1.$$

$\frac{\xi^{\wedge} \xi}{\zeta} \mp = q, \frac{\xi^{\wedge} \xi}{\zeta} \mp = v$

23. (Всеросс., 2014, финал, 11) Существует ли такое положительное число a , что при всех действительных x верно неравенство

$$|\cos x| + |\cos ax| > \sin x + \sin ax?$$

Нет