Обратные тригонометрические функции

Перед этим листком следует повторить статью «Введение в аркфункции», в которой приводятся определения арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса, а также графики этих функций и примеры решения простейших задач.

Задача. Докажите, что для любого $x \in [-1; 1]$ справедливо равенство

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}\,.$$

Решение. Пусть $\alpha = \arcsin x$; это означает по определению, что $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\alpha = x$. Согласно основному тригонометрическому тождеству

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha,$$

и поскольку косинус неотрицателен на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, имеем отсюда

$$\cos\alpha = +\sqrt{1 - \sin^2\alpha}\,.$$

Остаётся подставить сюда $\alpha = \arcsin x$ и $\sin\alpha = x$:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}\,,$$

что и требовалось.

Задача. Докажите, что

$$2\,\mathrm{arctg}\,2 + \arcsin\frac{4}{5} = \pi. \qquad (1)$$

Решение. Обозначим левую часть (1) через $\gamma = 2\alpha + \beta$, где $\alpha = \mathrm{arctg}\,2$ и $\beta = \arcsin\frac{4}{5}$. Имеем:

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot 2}{1-4} = -\frac{4}{3}\,;$$
$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{1 - \frac{16}{25}}} = \frac{4}{3}\,.$$

Отсюда

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \mathrm{tg}(2\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,2\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,2\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta} = \frac{-\frac{4}{3} + \frac{4}{3}}{1 + \frac{16}{9}} = 0.$$

Определим теперь интервал, в котором расположен угол γ. Имеем:

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{arctg}\,1 < \mathrm{arctg}\,2 = \alpha < \frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi;$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\pi}{4} < \arcsin\frac{4}{5} = \beta < \frac{\pi}{3}\,.$$

Отсюда

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < 2\alpha + \beta < \pi + \frac{\pi}{3} \quad\Rightarrow\quad \frac{3\pi}{4} < \gamma < \frac{4\pi}{3}\,.$$

Из полученной оценки и равенства $\mathrm{tg}\,\gamma = 0$ заключаем, что $\gamma = \pi$. Равенство (1) тем самым доказано.

Задача. (*МГУ, ВМК, 1999*) Известно, что $\operatorname{ctg}\alpha = 1$. Сравнить

$$\arccos\left(-\sqrt{-\sqrt{2}\sin\alpha - \frac{1}{4}}\right) \quad \text{и} \quad \frac{19\pi}{24}\,.$$

Решение. Если $\operatorname{ctg}\alpha = 1$, то $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ или $\alpha = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). В первом случае $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, что невозможно, так как под корнем оказывается отрицательное число. Во втором случае $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, и тогда

$$\arccos\left(-\sqrt{-\sqrt{2}\sin\alpha - \frac{1}{4}}\right) = \arccos\left(-\sqrt{1 - \frac{1}{4}}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6} = \frac{20\pi}{24} > \frac{19\pi}{24}\,.$$

Ответ: Первое число больше.

Задача. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013*) Выясните, какое из чисел больше:

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) + \operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) \quad \text{или} \quad \frac{5\sqrt{7}}{4}\,.$$

Решение. Пусть $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$; тогда $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} > 0$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Пусть также $\beta = \operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$; тогда $\operatorname{ctg}\beta = \sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$ и $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Имеем:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{ctg}\beta} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)} = -\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Следовательно, $\beta = \pi - \alpha$, то есть $\alpha + \beta = \pi$. Остаётся сравнить π и $\frac{5\sqrt{7}}{4}$. Имеем:

$$\frac{5\sqrt{7}}{4} = \sqrt{\frac{175}{16}} > \sqrt{\frac{168}{16}} = \sqrt{10{,}5} > \sqrt{10{,}24} = 3{,}2 > \pi.$$

Ответ: Второе число больше.

Задача. (*МФТИ, 1992*) Решить уравнение

$$\arcsin 5x = \operatorname{arcctg} 6x.$$

Решение. По определению арксинуса данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 5x = \sin(\operatorname{arcctg} 6x), \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arcctg} 6x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\,. \end{cases} \tag{2}$$

Поскольку арккотангенс принимает значения от 0 до π, синус арккотангенса положителен:

$$\sin(\operatorname{arcctg} 6x) = +\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} 6x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 36x^2}}\,.$$

Поэтому система (2) равносильна системе

$$\begin{cases} 5x = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 36x^2}}\,, \\ \operatorname{arcctg} 6x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 36 \cdot 25x^4 + 25x^2 - 1 = 0, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Делая в полученном уравнении замену $t = 5x^2$, приходим к уравнению $36t^2 + 5t - 1 = 0$, корни которого $t_1 = -\frac{1}{4}$ и $t_2 = \frac{1}{9}$. Корню t_1 не соответствуют никакие значения x. Корень t_2 даёт два значения $x = \pm\frac{1}{3\sqrt{5}}$, из которых годится только положительное.

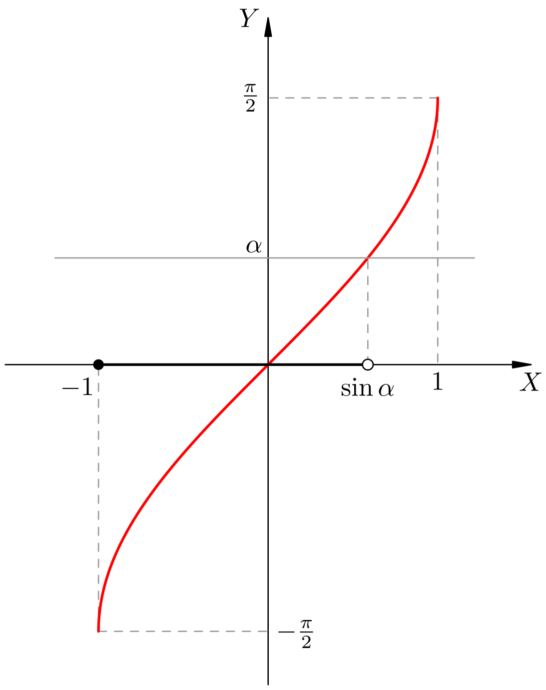
Ответ: $\frac{1}{3\sqrt{5}}$.

Задача. Для каждого значения параметра α решите неравенство

$$\arcsin x < \alpha. \tag{3}$$

Решение. Множество значений арксинуса есть отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому если $\alpha \leqslant -\frac{\pi}{2}$, то неравенство (3) не имеет решений, а если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то неравенству удовлетворяют все $x \in [-1; 1]$.

Пусть теперь $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Имеется ровно одно значение $x = \sin\alpha$, для которого выполнено равенство $\arcsin x = \alpha$. Ввиду монотонного возрастания функции $y = \arcsin x$ все решения неравенства (3) даются формулой $-1 \leqslant x < \sin\alpha$ (см. рисунок).



Ответ: Если $\alpha \leqslant -\frac{\pi}{2}$, то решений нет; если $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $-1 \leqslant x < \sin\alpha$; если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Задача. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012*) Решите неравенство

$$2\arcsin(x+1) + \arcsin\left(4x^2 + 8x + 4\right) < 0.$$

Решение. Делая замену $t = -x - 1$ и пользуясь нечётностью арксинуса, приходим к неравенству

$$\arcsin 4t^2 < 2\arcsin t. \tag{4}$$

Оба арксинуса определены при условиях

$$\begin{cases} 4t^2 \leqslant 1, \\ -1 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}.$$

При полученных t имеем оценку $-\frac{\pi}{3} \leqslant 2\arcsin t \leqslant \frac{\pi}{3}$, поэтому неравенство (4) равносильно неравенству (см. предыдущую задачу)

$$-1 \leqslant 4t^2 < \sin(2\arcsin t) \quad\Leftrightarrow\quad 4t^2 < 2t\sqrt{1-t^2} \quad\Leftrightarrow\quad t\left(2t-\sqrt{1-t^2}\right) < 0.$$

Если $t<0$, то оба множителя отрицательны и данное неравенство не имеет решений. При $t>0$ оно равносильно неравенству

$$2t-\sqrt{1-t^2}<0 \quad\Leftrightarrow\quad 4t^2<1-t^2 \quad\Leftrightarrow\quad 0<t<\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Поскольку $\frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$, интервал $\left(0; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ является множеством решений неравенства (4). Остаётся сделать обратную замену:

$$0<-x-1<\frac{1}{\sqrt{5}} \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{5+\sqrt{5}}{5}<x<-1.$$

Ответ: $\left(-\frac{5+\sqrt{5}}{5}; -1\right)$

В некоторых задачах фигурируют функции $\arcsin(\sin x)$ и $\arccos(\cos x)$, свойства которых желательно знать до начала олимпиады.

Задача. Построить график функции $y=\arcsin(\sin x)$.

Решение. Каково бы ни было число $x \in \mathbb{R}$, наша функция сопоставляет ему такое число $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, что $\sin y = \sin x$.

Если, например, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $y=x$. В самом деле, равенство синусов углов на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ влечёт равенство самих углов.

Пусть, далее, $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$. Тогда из тождества $\sin(\pi-x)=\sin x$ и оценки $-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi-x \leqslant \frac{\pi}{2}$ получаем, что $y=\pi-x$.

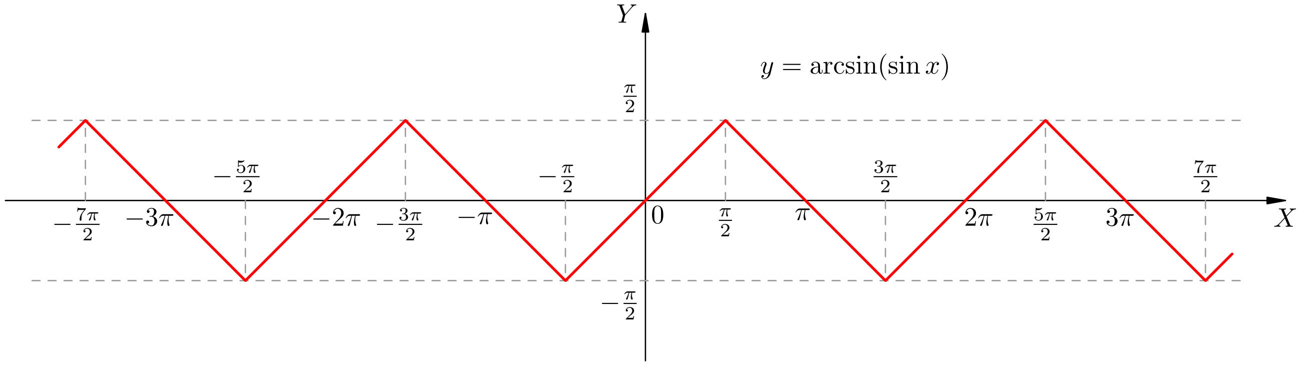
Вообще, пусть $-\frac{\pi}{2}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+2\pi n$ ($n\in\mathbb{Z}$). Тогда $-\frac{\pi}{2} \leqslant x-2\pi n \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\sin(x-2\pi n)=\sin x$. Поэтому $y=x-2\pi n$.

Далее, пусть $\frac{\pi}{2}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}+2\pi n$. Тогда $-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi-(x-2\pi n) \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\sin(\pi-x+2\pi n)=\sin x$. Поэтому $y=\pi-x+2\pi n$.

Таким образом, имеем:

$$y=\begin{cases} x-2\pi n, & \text{если } -\frac{\pi}{2}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+2\pi n; \\ \pi-x+2\pi n, & \text{если } \frac{\pi}{2}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}+2\pi n \ (n\in\mathbb{Z}). \end{cases}$$

Данная функция является кусочно-линейной — её график составлен из отрезков прямых, угловые коэффициенты которых поочерёдно принимают значения 1 и -1. Этот график приведён на рисунке.



Задача. Построить график функции $y = \arccos(\cos x)$.

Решение. Любому числу $x \in \mathbb{R}$ данная функция сопоставляет такое число $y \in [0; \pi]$, что $\cos y = \cos x$. Далее рассуждаем аналогично предыдущей задаче.

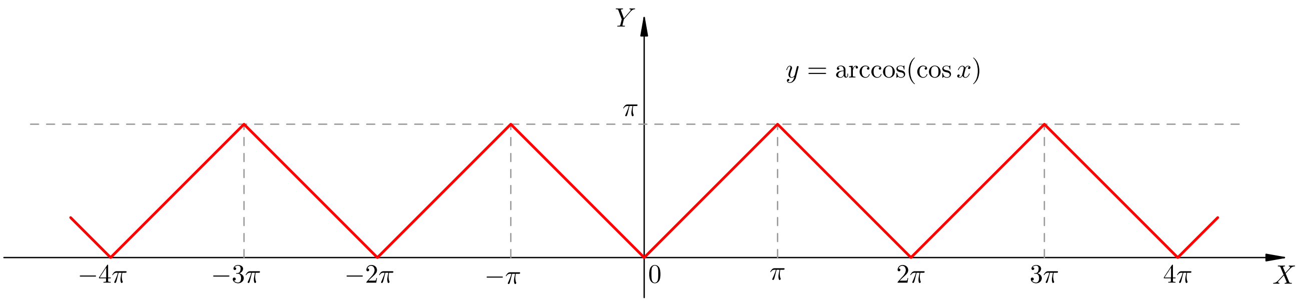
Если $0 \leqslant x \leqslant \pi$, то $y = x$, так как равенство косинусов на отрезке $[0; \pi]$ влечёт равенство самих углов. Если $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, то из тождества $\cos(2\pi - x) = \cos x$ и оценки $0 \leqslant 2\pi - x \leqslant \pi$ получаем $y = 2\pi - x$.

Вообще, если $2\pi n \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$, то из оценки $0 \leqslant x - 2\pi n \leqslant \pi$ и равенства $\cos(x - 2\pi n) = \cos x$ получаем $y = x - 2\pi n$. Если же $\pi + 2\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi + 2\pi n$, то соотношения $0 \leqslant 2\pi - (x - 2\pi n) \leqslant \pi$ и $\cos(2\pi - x + 2\pi n) = \cos x$ дают $y = 2\pi - x + 2\pi n$.

Итак,

$$y = \begin{cases} x - 2\pi n, & \text{если } 2\pi n \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi n; \\ 2\pi - x + 2\pi n, & \text{если } \pi + 2\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi + 2\pi n \ (n \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

График этой функции изображён на рисунке.



Данный график можно получить сдвигом графика функции $y = \arcsin(\sin x)$, если воспользоваться тождеством

$$\arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Выполните этот сдвиг самостоятельно, предварительно убедившись в справедливости приведённого тождества.

Задача. (*«Ломоносов», 2012*) Найдите все целочисленные решения уравнения

$$\left|\arcsin(\cos 4) - \frac{\pi x}{2}\right| = 4.$$

Решение. С учётом неравенства $\pi < 4 < 2\pi$ имеем:

$$\arcsin(\cos 4) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos 4) = \frac{\pi}{2} - (2\pi - 4) = 4 - \frac{3\pi}{2}.$$

Тогда наше уравнение переписывается в виде

$$\left|4 - \frac{\pi(x+3)}{2}\right| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 4 - \dfrac{\pi(x+3)}{2} = 4, \\ 4 - \dfrac{\pi(x+3)}{2} = -4 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = \dfrac{16}{\pi} - 3. \end{array}\right.$$

Второй корень не является целым числом.

Ответ: $x = -3$.

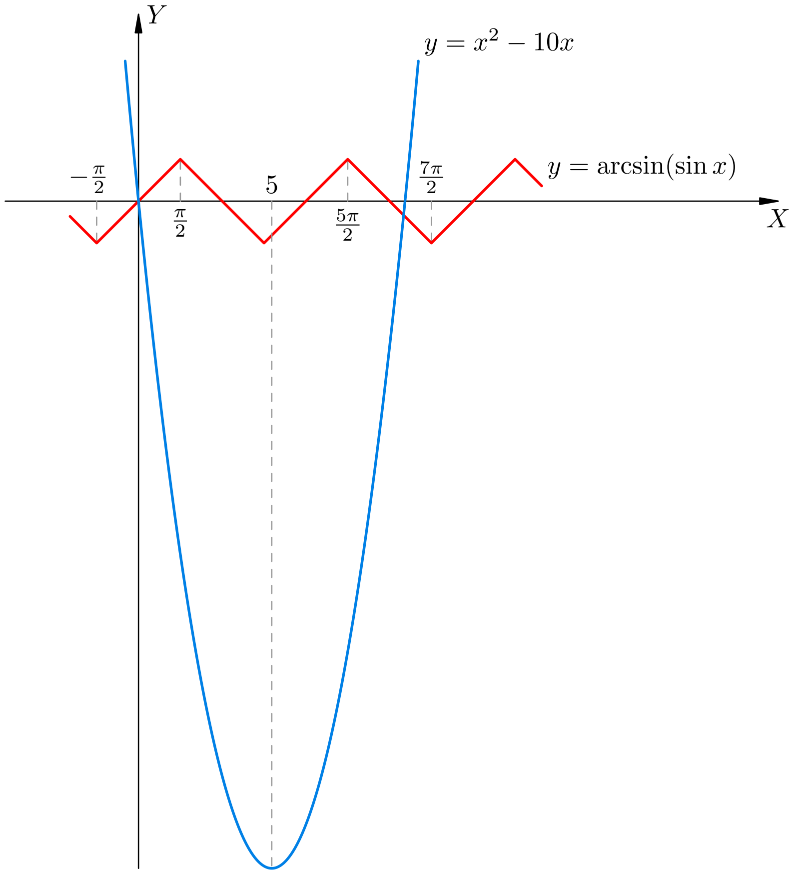
Задача. (*МГУ, ВКНМ, 2000*) Решите уравнение

$$x^2 = \arcsin(\sin x) + 10x.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$x^2 - 10x = \arcsin(\sin x)$$

и изобразим графики функций $f(x) = x^2 - 10x$ и $g(x) = \arcsin(\sin x)$. Графическая картина прояснит нам, как строить дальнейшие рассуждения.



Рассмотрим промежуток $I_1 = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функция $f(x)$ монотонно убывает при $x \leqslant 5$ и, в частности, на I_1; при этом $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) > 0$ и $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$. Функция $g(x)$ монотонно возрастает на I_1 (поскольку $g(x) = x$ на этом промежутке); при этом $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0$ и $g\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$. Следовательно, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственный корень на I_1. Легко проверить, что это $x = 0$.

Рассмотрим промежуток $I_2 = \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$. Функция $f(x)$ монотонно возрастает при $x \geqslant 5$ и, в частности, на I_2; при этом $f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{2}\left(\frac{5\pi}{2} - 10\right) < 0$ и $f\left(\frac{7\pi}{2}\right) = \frac{7\pi}{2}\left(\frac{7\pi}{2} - 10\right) > 0$. Функция $g(x)$ монотонно убывает на I_2 (поскольку $g(x) = 3\pi - x$ на этом промежутке); при этом $g\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$ и $g\left(\frac{7\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$. Следовательно, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственный корень на I_2. Найдём его:

$$x^2 - 10x = 3\pi - x \quad \Rightarrow \quad x^2 - 9x - 3\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{9 + \sqrt{81 + 12\pi}}{2}$$

(второй корень квадратного уравнения отрицателен и является посторонним).

Вне промежутков I_1 и I_2 уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет корней. В самом деле, если $x < -\frac{\pi}{2}$, то $f(x) > f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + 5\pi > \frac{\pi}{2}$. Если $x > \frac{7\pi}{2}$, то $f(x) > f\left(\frac{7\pi}{2}\right) = \frac{49\pi^2}{4} - 35\pi > \frac{\pi}{2}$. Если же

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$, то $f(x) < f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{25\pi^2}{4} - 25\pi < -\frac{\pi}{2}$. Следовательно, во всех этих случаях $f(x)$ не может равняться $g(x)$.

Ответ: 0; $\frac{9+\sqrt{81+12\pi}}{2}$.

Задача. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013*) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\sqrt{\arcsin x} \leqslant \sqrt{\arccos y}\,.$$

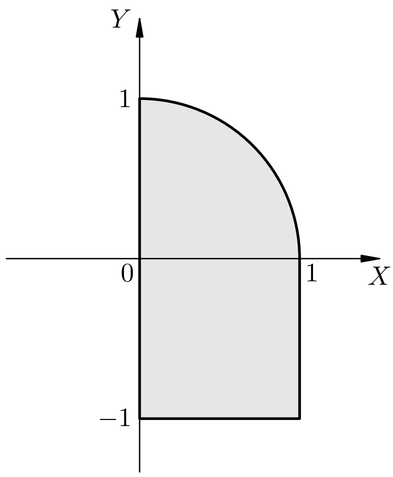
Решение. Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \arcsin x \geqslant 0, \\ \arcsin x \leqslant \arccos y. \end{cases} \tag{5}$$

Множеством решений первого неравенства (5) является отрезок $0 \leqslant x \leqslant 1$. Если $y \in [-1; 0]$, то $\frac{\pi}{2} \leqslant \arccos y \leqslant \pi$, и тогда второе неравенство (5) выполнено при всех $x \in [0; 1]$. Если же $y \in [0; 1]$, то $0 \leqslant \arccos y \leqslant \frac{\pi}{2}$, и тогда при $x \in [0; 1]$ второе неравенство (5) равносильно

$$x \leqslant \sin(\arccos y) = \sqrt{1 - y^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

В результате имеем объединение квадрата и четверти круга (см. рисунок).



Сторона квадрата и радиус круга равны 1, поэтому искомая площадь равна $1 + \frac{\pi}{4}$.

Задачи

1. Докажите, что для любого $x \in [-1; 1]$ справедливо равенство

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}\,.$$

2. Докажите равенства

а) $\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R};$ б) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R};$

в) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1; 1);$ г) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad x \in [-1; 0) \cup (0; 1].$

3. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2018, 10–11*) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\arcsin(2x) + \arccos(2x) \geqslant \frac{\pi}{4} \cdot \left(y^2 - 2\right).$$

$\boxed{4}$

4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012*) Маше нужно было вычислить значение выражения $\sin(2\arccos\alpha)$ при заданном значении α. Однако Маша по невнимательности вычислила значение выражения $\cos(2\arcsin\alpha)$, но при том же значении α, причём вычислила верно. Оказалось, что Машин ответ совпал с правильным ответом для исходного выражения. Каким при этом могло быть число α (укажите все возможные значения)?

$\boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};\ -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

5. Докажите, что

а) $2\operatorname{arctg} 4 + \arccos\dfrac{15}{17} = \pi$; б) $4\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$.

6. (*МГУ, мехмат, 1999, устный экз.*) Вычислить

$$\operatorname{arctg} 8 + \operatorname{arctg}\frac{19}{22} + \operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{2}\right).$$

$\boxed{\frac{3\pi}{2}}$

7. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2018, 10–11*) Вычислите

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{2-1}{2^3-1} + \operatorname{arctg}\frac{3-1}{3^3-1} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{100-1}{100^3-1}\right).$$

$\boxed{\frac{99}{203}}$

8. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2018, 10–11*) Решите уравнение

$$\left(\arcsin\frac{3}{5} - \arccos\frac{4}{5}\right) \cdot x + \pi = 2\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$$

$\boxed{x \in \mathbb{R}}$

9. (*МГУ, ВМК, 1999*) Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$. Сравнить

$$\arccos\left(-\sqrt{-3\cos\alpha - 1}\right) \quad \text{и} \quad \frac{19\pi}{24}.$$

$\boxed{\text{Второе число больше}}$

10. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013*) Выясните, какое из чисел больше:

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}+2\right)+\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{3}-2\right) \quad \text{или} \quad \frac{7\sqrt{3}}{4}\,.$$

Первое число больше

11. (*«Ломоносов», 2016*) Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{arcctg}^2 x = 3\operatorname{arctg}^2 x + \frac{\pi^2}{36}\,.$$

$\frac{1}{\sqrt{3}}$

12. (*ММО, 2016, 11*) Существует ли такое значение x, что выполняется равенство

$$\arcsin^2 x + \arccos^2 x = 1\,?$$

Нет

13. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015*) Что больше: $2\sin\frac{5\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}$ или сумма корней уравнения $|3\arccos x| = |\arcsin x|$?

Первое число больше

14. (*МГУ, ВМК, 2005*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \arccos\dfrac{x+y}{4} = \arccos\dfrac{5xy}{24}\,, \\ x^2+y^2=13. \end{cases}$$

$\left(\frac{-13-\sqrt{481}}{10}, \frac{-13+\sqrt{481}}{10}\right), \left(\frac{-13+\sqrt{481}}{10}, \frac{-13-\sqrt{481}}{10}\right)$

15. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2005*) Решите уравнение

$$\sin\left(\sqrt{3}\arcsin x\right) = 1.$$

$\sin\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

16. (*МГУ, ИСАА, 2002*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \arccos 2y + \arcsin 3x = \dfrac{\pi}{4}\,, \\ \arcsin 2y \cdot \arccos 3x = \dfrac{5\pi^2}{64}\,. \end{cases}$$

Для каждого решения (x, y) определите, какое из чисел больше: $2y-3x$ или $\sqrt[4]{2}-0{,}5$.

$\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{6}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\right)$; первое число больше

17. (*МФТИ, 1992*) Решить уравнение

а) $2\arcsin 2x = \arccos 7x$;   б) $\operatorname{arctg} 3x = \arccos 8x$.

а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{6\sqrt{2}}$

18. (*МФТИ, 2002*) Решить уравнение

а) $\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{3x} + \arcsin 3x = \dfrac{\pi}{2}$;   б) $\operatorname{arcctg}\dfrac{1-x}{2x} + \arccos 2x = \dfrac{\pi}{2}$.

а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{2}{5}$

19. При всех значениях параметра α решите неравенство $\arcsin x \geqslant \alpha$.

Если $\alpha \leqslant -\frac{\pi}{2}$, то $-1 \leqslant x \leqslant 1$; если $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha \leqslant x \leqslant 1$; если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то решений нет

20. При всех значениях параметра α решите неравенство $\arccos x \leqslant \alpha$.

Если $\alpha < 0$, то решений нет; если $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, то $\cos\alpha \leqslant x \leqslant 1$; если $\alpha > \pi$, то $-1 \leqslant x \leqslant 1$

21. (*МГУ, химич. ф-т, 2008*) Решите неравенство

$$\arccos 3x \leqslant \arccos\sqrt{6-15x}\,.$$

$\frac{1}{3}$

22. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019*) При всех значениях $a \in \mathbb{R}$ решите неравенство

$$\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + (x-a)^2 \leqslant 2\operatorname{arctg} x.$$

при $a < 0$ решений нет, при $a \geqslant 0$ есть одно решение $x = a$

23. (*МГУ, ВМК, 2002*) Решите неравенство

$$2\cos(\arcsin x) - \sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) \leqslant 0.$$

$\left[-1; -\frac{7}{8}\right] \cup \{1\}$

24. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012*) Решите неравенство

а) $\arcsin\left(6x^2 - 12x + 6\right) + 2\arcsin(x-1) < 0$;

б) $2\arcsin(x+1) + \arccos\left(3x^2 + 6x + 2\right) < 0$.

а) $\left(\frac{10-\sqrt{10}}{10}; 1\right)$; б) $\left[-\frac{3+\sqrt{6}}{3}; -\frac{5+\sqrt{10}}{5}\right)$

25. (*МГУ, ВМК, 1996*) Решите неравенство

$$\arccos 3x + \arcsin(x+1) \leqslant \frac{7\pi}{6}\,.$$

$\boxed{\left[\frac{-5-2\sqrt{3}}{26};\, 0\right]}$

26. (*«Ломоносов», 2018, 10–11*) Решите неравенство

$$\arcsin\left(\frac{5}{2\pi}\arccos x\right) > \arccos\left(\frac{10}{3\pi}\arcsin x\right).$$

$\boxed{\left[\sin\frac{\pi}{10};\, \sin\frac{9\pi}{50}\right) \cup \left(\sin\frac{9\pi}{50};\, \sin\frac{3\pi}{10}\right]}$

27. (*«Ломоносов», 2012*) Решите неравенство

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x} \geqslant \arcsin(x^2 - 2x - 4).$$

$\boxed{3}$

28. (*«Ломоносов», 2012*) Найдите все целочисленные решения уравнения

$$\left|\arccos(\sin 6) - \frac{\pi x}{2}\right| = 6.$$

$\boxed{5}$

29. (*МГУ, ВКНМ, 2000*) Решите уравнение

$$\arccos(\cos x) = x^2 + 10x.$$

$\boxed{0;\ \frac{-9-\sqrt{81+16\pi}}{2}}$

30. (*«Ломоносов», 2015, 10–11*) Найдите главный (наименьший положительный) период функции

$$y = \left(\arcsin\left(\sin\left(\arccos\left(\cos 3x\right)\right)\right)\right)^{-5}.$$

$\boxed{\frac{\pi}{3}}$

31. (*ОММО, 2018*) Изобразите (с обоснованием) на координатной плоскости Oxy множество решений неравенства

$$\left(y^2 - \arcsin^2(\sin x)\right)\left(y^2 - \arcsin^2\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)\right)\left(y^2 - \arcsin^2\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)\right) < 0.$$

32. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013*) Найти наибольшее значение выражения

$$2\arccos\bigl(\sin(x-2y-1)\bigr)+x-y+2$$

при $0\leqslant x\leqslant \pi$, $0\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{2\pi+3}$

33. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013*) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\sqrt{\arcsin y}\leqslant\sqrt{\arccos x}\,.$$

$\boxed{1+\frac{\pi}{4}}$

34. (*«Ломоносов», 2014*) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\sqrt{\arcsin\frac{x}{5}}\leqslant\sqrt{\arccos\frac{y}{5}}\,.$$

В ответе укажит целое число, ближайшее к найденному значению площади.

$\boxed{45}$

35. (*МГУ, экономич. ф-т, 1993*) Найдите периметр фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases}2|x-2|\arcsin\left((y+1)^2\right)\leqslant\pi(2-x),\\ 2|y+1|+x\geqslant 0.\end{cases}$$

$\boxed{10+2\sqrt{5}}$

36. (*МГУ, географич. ф-т, 2001*) Решите уравнение

$$4\arcsin\left(2^x-7\right)-\arccos\left(5^x-124\right)=\frac{6\pi}{x}\,.$$

$\boxed{3}$

37. (*МГУ, экономич. ф-т, 1999*) Решить уравнение

$$x+\frac{1}{6}\arccos(\cos 15x+2\cos 4x\sin 2x)=\frac{\pi}{12}\,.$$

$\boxed{-\frac{\pi}{26};\ \frac{\pi}{34}}$

38. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014*) Укажите целое число, ближайшее к меньшему из корней уравнения

$$\operatorname{arctg}\left(\left(\frac{5x}{26}+\frac{13}{10x}\right)^2\right)-\operatorname{arctg}\left(\left(\frac{5x}{26}-\frac{13}{10x}\right)^2\right)=\frac{\pi}{4}\,.$$

$\boxed{-3}$

39. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019*) Решите неравенство

$$\arcsin(\sin|x|) \geqslant \arccos|\cos 2x|.$$

$\boxed{x \in \{\pm\pi k\} \bigcup \left[\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right] \bigcup \left[-\frac{2\pi}{3}-2\pi k; -\frac{\pi}{3}-2\pi k\right],\ k=0,1,2,\ldots}$

40. (*«Ломоносов», 2014*) Найдите количество корней уравнения

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\sqrt{35\pi^2+4\pi x-4x^2}\right) = \arcsin\left(\sin\sqrt{\frac{35\pi^2}{4}+\pi x - x^2}\right).$$

$\boxed{13}$

41. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013*) Выясните, сколько корней имеет уравнение

$$\left(21x-11+\frac{\sin x}{100}\right)\cdot\sin(6\arcsin x)\cdot\sqrt{(\pi-6x)(\pi+x)} = 0.$$

$\boxed{7 \text{ корней}}$

42. (*«Ломоносов», 2011*) Функция $y=f(t)$ такова, что сумма корней уравнения $f(\cos x)=0$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ равна 17π, а сумма корней уравнения $f(\sin x)=0$ на отрезке $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ равна 29π. Какова сумма корней второго уравнения на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$?

$\boxed{43\pi}$

43. (*«Ломоносов», 2010*) Проекции некоторой кривой в координатном пространстве на плоскости Oxz и Oyz удовлетворяют уравнениям $5x+\cos z=0$ и $z=\operatorname{arctg}\sqrt{y-3}$ соответственно. Найдите функцию $y=f(x)$, график которой состоит из тех и только тех точек, которые могли бы при этих условиях служить проекциями точек той же кривой на плоскость Oxy.

$\boxed{y=\frac{1}{25x^2}+2 \text{ при } x\in\left[-\frac{1}{5};0\right)}$

44. (*МГУ, экономич. ф-т, 2005*) Фигура F задаётся на координатной плоскости неравенством

$$\frac{3\pi^2-2\arcsin\left(\frac{y-x+9}{13}\right)\cdot\arccos\left(\frac{10+2x+2y}{18}\right)}{|x-4|\cdot\left(\left|\sqrt{9\sqrt{128}-97}+x\right|+|y+5|\right)} \geqslant 0.$$

В каких пределах изменяются площади всевозможных кругов, целиком принадлежащих F?

$\boxed{(0; 16\pi)}$