

## Треугольник с углом $60^\circ$

Треугольник, один из углов которого равен  $60^\circ$ , обладает некоторыми интересными свойствами.

**ЗАДАЧА 1.** В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $BB_1$  и  $CC_1$ . Докажите, что если описанные окружности треугольников  $ABB_1$  и  $ACC_1$  пересекаются в точке, лежащей на стороне  $BC$ , то  $\angle A = 60^\circ$ .

**ЗАДАЧА 2.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $75^\circ$ , а угол  $B$  равен  $60^\circ$ . Вершина  $M$  равнобедренного прямоугольного треугольника  $BCM$  с гипотенузой  $BC$  расположена внутри треугольника  $ABC$ . Найдите угол  $MAC$ .

◻

**ЗАДАЧА 3.** (*Всеросс. по геометрии, 2014, 9*) В треугольнике  $ABC$   $\angle B = 60^\circ$ ,  $O$  — центр описанной окружности,  $BL$  — биссектриса. Описанная окружность треугольника  $BOL$  пересекает описанную окружность треугольника  $ABC$  вторично в точке  $D$ . Докажите, что  $BD \perp AC$ .

**ЗАДАЧА 4.** (*Всеросс. по геометрии, 2011*) В треугольнике  $ABC$   $\angle A = 60^\circ$ . Серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$  пересекает прямую  $AC$  в точке  $C_1$ . Серединный перпендикуляр к отрезку  $AC$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $B_1$ . Докажите, что прямая  $B_1C_1$  касается окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

**ЗАДАЧА 5.** (*Моск. матем. регата, 2013, 8*) На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  равностороннего треугольника  $ABC$  выбраны точки  $K$ ,  $M$  и  $N$  соответственно так, что угол  $MKB$  равен углу  $MNC$ , а угол  $KMB$  равен углу  $KNA$ . Докажите, что  $NB$  — биссектриса угла  $MNK$ .

**ЗАДАЧА 6.** (*Моск. матем. регата, 2013, 10*) В треугольнике  $ABC$  угол  $B$  равен  $60^\circ$ . Точка  $D$  внутри треугольника такова, что  $\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC$ . Найдите наименьшее значение площади треугольника  $ABC$ , если  $BD = a$ .

◻

**ЗАДАЧА 7.** В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $60^\circ$ ;  $O$  — центр описанной окружности,  $H$  — ортоцентр,  $I$  — центр вписанной окружности, а  $I_A$  — центр внеписанной окружности, касающейся стороны  $BC$ . Докажите, что  $IO = IH$  и  $I_AO = I_AH$ .

**ЗАДАЧА 8.** (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2013, 8–9*) В треугольнике  $ABC$ :  $\angle C = 60^\circ$ ,  $\angle A = 45^\circ$ . Пусть  $M$  — середина  $BC$ ,  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ . Докажите, что прямая  $MH$  проходит через середину дуги  $AB$  описанной окружности треугольника  $ABC$ .

**ЗАДАЧА 9.** (*Всеросс. по геометрии, 2014, 8*) В треугольнике  $ABC$  отмечены середины сторон  $AC$  и  $BC$  — точки  $M$  и  $N$  соответственно. Угол  $MAN$  равен  $15^\circ$ , а угол  $BAN$  равен  $45^\circ$ . Найдите угол  $ABM$ .

◻

ЗАДАЧА 10. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) В остроугольном треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $60^\circ$ .  $H$  — точка пересечения высот этого треугольника. Окружность с центром  $H$  и радиусом  $HC$  второй раз пересекает прямые  $CA$  и  $CB$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Докажите, что  $AN$  и  $BM$  параллельны (или совпадают).

ЗАДАЧА 11. (*Турнир городов, 2017, 8–9*) Из вершины  $A$  остроугольного треугольника  $ABC$  по биссектрисе угла  $A$  выпустили бильярдный шарик, который отразился от стороны  $BC$  по закону «угол падения равен углу отражения» и дальше катился по прямой, уже ни от чего не отражаясь. Докажите, что если  $\angle A = 60^\circ$ , то траектория шарика проходит через центр описанной окружности треугольника  $ABC$ .

ЗАДАЧА 12. (*Всеросс., 2010, регион, 9.4*) В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $60^\circ$ . Пусть  $BB_1$  и  $CC_1$  — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине  $A$  относительно прямой  $B_1C_1$ , лежит на стороне  $BC$ .

ЗАДАЧА 13. В остроугольном треугольнике  $ABC$  с углом  $A$ , равным  $60^\circ$ , высоты пересекаются в точке  $H$ .

а) Пусть  $M$  и  $N$  — точки пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам  $BH$  и  $CH$  со сторонами  $AB$  и  $AC$  соответственно. Докажите, что точки  $M$ ,  $N$  и  $H$  лежат на одной прямой.

б) Докажите, что на той же прямой лежит центр  $O$  описанной окружности.