

Треугольник с углом 60°

Треугольник, один из углов которого равен 60° , обладает некоторыми интересными свойствами.

ЗАДАЧА 1. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1 . Докажите, что если описанные окружности треугольников ABB_1 и ACC_1 пересекаются в точке, лежащей на стороне BC , то $\angle A = 60^\circ$.

ЗАДАЧА 2. В треугольнике ABC угол C равен 75° , а угол B равен 60° . Вершина M равнобедренного прямоугольного треугольника BCM с гипотенузой BC расположена внутри треугольника ABC . Найдите угол MAC .

◻

ЗАДАЧА 3. (*Всеросс. по геометрии, 2014, 9*) В треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$, O — центр описанной окружности, BL — биссектриса. Описанная окружность треугольника BOL пересекает описанную окружность треугольника ABC вторично в точке D . Докажите, что $BD \perp AC$.

ЗАДАЧА 4. (*Всеросс. по геометрии, 2011*) В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$. Серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекает прямую AC в точке C_1 . Серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает прямую AB в точке B_1 . Докажите, что прямая B_1C_1 касается окружности, вписанной в треугольник ABC .

ЗАДАЧА 5. (*Моск. матем. регата, 2013, 8*) На сторонах AB , BC и AC равностороннего треугольника ABC выбраны точки K , M и N соответственно так, что угол MKB равен углу MNC , а угол KMB равен углу KNA . Докажите, что NB — биссектриса угла MNK .

ЗАДАЧА 6. (*Моск. матем. регата, 2013, 10*) В треугольнике ABC угол B равен 60° . Точка D внутри треугольника такова, что $\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC$. Найдите наименьшее значение площади треугольника ABC , если $BD = a$.

◻

ЗАДАЧА 7. В треугольнике ABC угол A равен 60° ; O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, I — центр вписанной окружности, а I_A — центр внеписанной окружности, касающейся стороны BC . Докажите, что $IO = IH$ и $I_AO = I_AH$.

ЗАДАЧА 8. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2013, 8–9*) В треугольнике ABC : $\angle C = 60^\circ$, $\angle A = 45^\circ$. Пусть M — середина BC , H — ортоцентр треугольника ABC . Докажите, что прямая MH проходит через середину дуги AB описанной окружности треугольника ABC .

ЗАДАЧА 9. (*Всеросс. по геометрии, 2014, 8*) В треугольнике ABC отмечены середины сторон AC и BC — точки M и N соответственно. Угол MAN равен 15° , а угол BAN равен 45° . Найдите угол ABM .

◻

ЗАДАЧА 10. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) В остроугольном треугольнике ABC угол C равен 60° . H — точка пересечения высот этого треугольника. Окружность с центром H и радиусом HC второй раз пересекает прямые CA и CB в точках M и N соответственно. Докажите, что AN и BM параллельны (или совпадают).

ЗАДАЧА 11. (*Турнир городов, 2017, 8–9*) Из вершины A остроугольного треугольника ABC по биссектрисе угла A выпустили бильярдный шарик, который отразился от стороны BC по закону «угол падения равен углу отражения» и дальше катился по прямой, уже ни от чего не отражаясь. Докажите, что если $\angle A = 60^\circ$, то траектория шарика проходит через центр описанной окружности треугольника ABC .

ЗАДАЧА 12. (*Всеросс., 2010, регион, 9.4*) В треугольнике ABC угол A равен 60° . Пусть BB_1 и CC_1 — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине A относительно прямой B_1C_1 , лежит на стороне BC .

ЗАДАЧА 13. В остроугольном треугольнике ABC с углом A , равным 60° , высоты пересекаются в точке H .

а) Пусть M и N — точки пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам BH и CH со сторонами AB и AC соответственно. Докажите, что точки M , N и H лежат на одной прямой.

б) Докажите, что на той же прямой лежит центр O описанной окружности.