

## Трёхгранные и многогранные углы

ЗАДАЧА 1. Плоские углы трёхгранного угла равны  $90^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $\alpha$ . Найдите его двугранные углы.

□ 06 06

ЗАДАЧА 2. Все плоские углы трёхгранного угла равны  $90^\circ$ . Найдите углы между биссектрисами плоских углов.

□ 09

ЗАДАЧА 3. Все плоские углы трёхгранного угла равны  $60^\circ$ . Найдите углы между его рёбрами и плоскостями противоположных граней.

□  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  cos 60°

ЗАДАЧА 4. (*Полярный трёхгранный угол*) Из точки  $P$  внутри трёхгранного угла опустим перпендикуляры на плоскости его граней. Полученный новый трёхгранный угол с вершиной  $P$  называется *полярным* исходному.

Докажите, что двугранные углы трёхгранного угла и соответствующие плоские углы полярного угла дополняют друг друга до  $180^\circ$ .

Дальнейшие обозначения:

- $\alpha, \beta, \gamma$  — плоские углы трёхгранного угла;
- $A, B, C$  — двугранные углы трёхгранного угла, противолежащие плоским углам  $\alpha, \beta, \gamma$  соответственно (иными словами, двугранный угол  $A$  образован плоскостями  $\beta$  и  $\gamma$ ; аналогично  $B$  и  $C$ ).

ЗАДАЧА 5. (*Теорема синусов для трёхгранного угла*) Докажите, что

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}.$$

ЗАДАЧА 6. (*Первая теорема косинусов для трёхгранного угла*) Докажите, что

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A.$$

ЗАДАЧА 7. (*Вторая теорема косинусов для трёхгранного угла*) Докажите, что

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \alpha.$$

*Указание.* Рассмотрите полярный угол и примените к нему первую теорему косинусов.

ЗАДАЧА 8. Докажите, что:

- каждый плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других плоских углов;
- сумма плоских углов трёхгранного угла меньше  $360^\circ$ .

ЗАДАЧА 9. («Физтех», 2020.4) Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 1 и 4.

$$\frac{6}{91} = S \cdot \frac{8}{1} \text{ площадь} = OSM7$$

ЗАДАЧА 10. (Всеросс., 1997, округ, 11) Существуют ли выпуклая  $n$ -угольная ( $n \geq 4$ ) и треугольная пирамиды такие, что четыре трёхгранных угла  $n$ -угольной пирамиды равны трёхгранным углам треугольной пирамиды?

ЗАДАЧА 11. (ММО, 1973, 10) У трёхгранного угла проведены биссектрисы плоских углов. Доказать, что попарные углы между биссектрисами либо одновременно тупые, либо одновременно прямые, либо одновременно острые.